

# Messwerte erfassen und analysieren mit CASIO Grafikrechnern

2. vollständig überarbeitete Auflage



*Michael Bostelmann*



# Inhalt

1	Vorwort .....	4
2	Zur Vorbereitung .....	5
2.1	Die Hardware .....	5
2.2	Die Software .....	5
2.3	Vorbereitung und Durchführung einer Messung .....	6
2.4	Einstellen eines Triggers .....	8
2.5	Übertragen von Messwerten in Listen .....	9
2.6	Datenübertragung zwischen zwei Rechnern .....	10
2.7	Auswertung von Daten .....	11
3.	Experimente .....	13
3.1	Die Fall-Leiter .....	13
3.2	Der springende Ball .....	17
3.3	Freier Fall mit Ball .....	21
3.4	Entladung eines Kondensators .....	23
3.5	Abkühlung .....	27
3.6	Ein Loch in der Flasche .....	30
3.7	Schwerpunkt einer Cola-Dose .....	36
3.8	Luftballons aufblasen .....	41
3.9	Federpendel .....	44
3.10	Fadenpendel .....	48
Anhang	.....	54
A	– Regression .....	54
B	– Daten mit Excel austauschen .....	58
C	– Kopiervorlage Fall-Leiter .....	60

# 1 Vorwort

Dieses Buch richtet sich gleichermaßen an Mathematiklehrerinnen und -lehrer wie an Kolleginnen und Kollegen aus den Naturwissenschaften. In beiden Bereichen ist die Arbeit mit authentischen Daten motivierend, insbesondere wenn sie selbst ermittelt wurden. Während dies in den Naturwissenschaften durch deren experimentellen Charakter zum Standard gehört, haben Experimente im Mathematikunterricht noch untergeordneten Charakter. Dies liegt häufig am materiellen und zeitlichen Aufwand, da der Mathematikunterricht in der Regel nicht in einem naturwissenschaftlichen Fachraum stattfindet.

Einfache und preiswerte Messwerterfassungssysteme wie das C-LAB ermöglichen in Verbindung mit entsprechenden Sensoren und grafikfähigen Taschenrechnern schnell und mit geringem Aufwand Experimente durchzuführen und auszuwerten. Auch ein Demonstrationsexperiment bietet durch das schnelle Übertragen der Messwerte auf die Schülerrechner die Möglichkeit, dass die Schülerinnen und Schüler einzeln oder in Gruppen individuell arbeiten können.

Bei den beschriebenen Experimenten ging es mir immer auch – oft sogar in erster Linie – um eine Bereicherung des Mathematikunterrichts. Insbesondere das Modellieren bekommt bei der Verwendung selbst ermittelter Daten einen ganz anderen Stellenwert. Andere Gebiete der Schulmathematik (Statistik, Differenzialgleichungen, ...) profitieren ebenfalls davon. Mit diesem Buch möchte ich eine Lanze brechen für mehr Experimente im Mathematikunterricht.

Aus diesem Grund steht bei den beschriebenen Experimenten meist die mathematische Modellierung im Vordergrund. Wo es möglich war, wurden physikalische Begründungen bzw. Interpretationen ergänzt.

Im ersten Teil des Buches werden grundlegende Schritte beim Erfassen und Auswerten von Daten erläutert. Der zweite Teil beschreibt die Experimente und im Anhang gehe ich auf das Werkzeug „Regression“ sowie den Austausch von Daten zwischen dem GTR und einem Computer ein.

Zur Erfassung und Auswertung der Daten wurden neben dem Grafikrechner fx-CG50 das Interface C-LAB sowie das im fx-CG50 integrierte Modul E-CON4 verwendet.

Alle Experimente können aber auch mit dem Interface EA200 und dem Modul E-CON2 sowie den Rechnern der fx-9860-Serie, der fx-9750-Serie, dem fx-CG20 und dem ClassPad durchgeführt werden.

Ich hoffe, dieses Buch gibt Ihnen Impulse und Anregungen für einen kreativen und motivierenden Unterricht.

## 2 Zur Vorbereitung

### 2.1 Die Hardware

Zur Erfassung von Messwerten mit dem fx-CG50 verwenden wir das Interface C-LAB sowie entsprechende Sensoren bzw. Messfühler. Sensoren für Temperatur- und Spannungsmessungen sind bereits im Lieferumfang des C-LAB enthalten. Weitere Sensoren werden z.B. von der Firma Vernier angeboten. Zur Verbindung von C-LAB und fx-CG50 muss das Dreipolkabel verwendet werden, das mit dem Rechner geliefert wird.



C-LAB mit Temperatur- und Spannungssensor



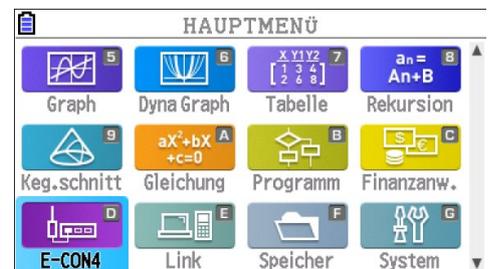
fx-CG50



Ultraschall-Bewegungssensor

### 2.2 Die Software

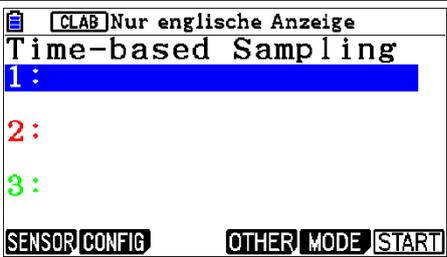
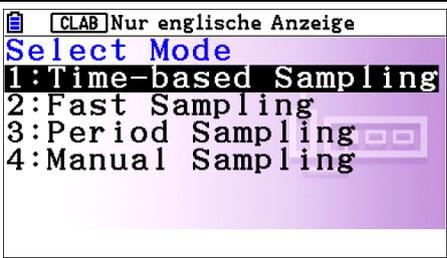
Zur Verwendung des C-LAB wird die auf dem fx-CG50 installierte App E-CON4 verwendet. Zu finden ist diese unter dem entsprechenden Icon im Hauptmenü.



## 2.3 Vorbereitung und Durchführung einer Messung

Das folgende Beispiel einer einfachen Temperaturmessung zeigt, wie man Messwerte aufnimmt und welche Einstellungen dazu nötig sind.

Verbinden Sie den fx-CG50 unter Verwendung des Dreipolkabels mit dem CASIO-GC-Eingang des C-LAB. Achten Sie darauf, dass der Stecker richtig einrastet. Schließen Sie dann den Temperatursensor an den Eingang 1 des C-LAB an und schalten Sie das C-LAB mit dem weißen Einschaltknopf ein.

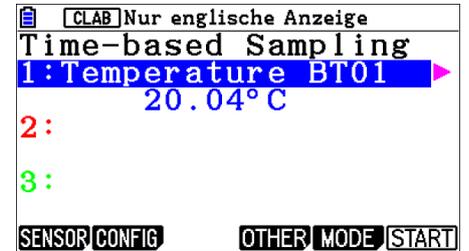
<p>Starten Sie E-CON4. Beim ersten Mal bzw. nach einem Reset gelangen Sie zuerst in die Interface-Auswahl. Wählen Sie dort [F1]{CLAB}<sup>1</sup>. Diese Auswahl können Sie später über [SHIFT] [MENU]{SETUP} ändern.</p>	 <p>Startbildschirm</p>
<p>Verbinden Sie den Temperatursensor mit Kanal 1 des C-LAB. In der folgenden Kanal-Übersicht sehen Sie die drei Eingänge des C-LAB. Nach einigen Sekunden sollte der Temperatursensor automatisch erkannt sein. Sonst legen Sie ihn über die Sensor-Auswahl fest (s.u.). Sie befinden sich aktuell im „Time-based“-Modus. Schalten Sie mit [F5]{MODE} in die Modus-Auswahl.</p>	 <p>Kanal-Übersicht</p>
<p><u>„Time-based“-Modus:</u> Bis zu 2000 Messwerten pro Sekunde (Zeitauflösung 0,5ms). Bei Auflösungen ab 0,2s wird der Graph während der Messung angezeigt.  <u>„Fast“-Modus:</u> Zeitauflösung 20-500µs (nur ein Kanal)  <u>„Period“-Modus:</u> Start/Stop-Triggerung möglich  <u>„Manual“-Modus:</u> Manuelle Konfiguration</p>	 <p>Kanal-Übersicht</p>
<p><b>Manuelle Sensorwahl:</b>          Schalten Sie mit [EXIT] zurück in die Kanal-Übersicht, markieren Sie mit dem Cursor die erste Zeile (Kanal 1) und schalten Sie mit [F1]{SENSOR} in die Sensor-Auswahl um. Sie können Sensoren aus verschiedenen Gruppen auswählen. Sollte ein Kanal bereits belegt sein, können Sie diesen mit [F5]{None} löschen.</p>	 <p>Kanal-Übersicht</p>

<sup>1</sup> In eckigen Klammern steht die Beschriftung einer Taste, in geschweiften Klammern die Bedeutung.

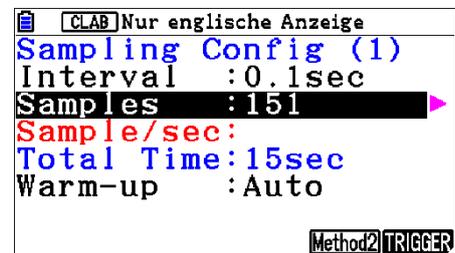
Wechseln Sie mit [F2] in den CASIO-Ordner und wählen Sie dort den Temperatursensor aus. Anschließend müssen Sie noch die Einheit (°F oder °C) festlegen. Wählen Sie °C.



Nach einigen Sekunden beginnt die Messstatus-LED (rechts) des C-LAB grün zu blinken und auf dem Bildschirm ist die aktuelle Temperatur zu sehen. Der fx-CG50 arbeitet nun als Online-Messinstrument.

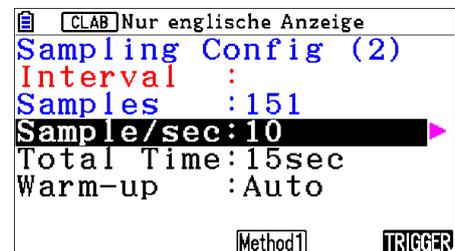


Um eine Messreihe aufzunehmen, muss das C-LAB zunächst konfiguriert werden. Drücken Sie dazu in der Kanal-Übersicht [F2]{CONFIG}. Es gibt zwei Messmethoden. Bei Methode 1 stellen Sie den zeitlichen Abstand zwischen zwei Messwerten (*Interval*) sowie die Anzahl der Messwerte (*Samples*) ein. Die Dauer der Messreihe (*Total Time*) ergibt sich dann daraus.



Messmethode 1

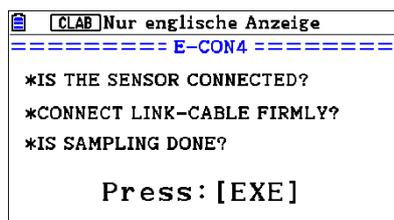
Bei Methode 2 wählt man die Messwertrate (*Sample/sec*) und die Dauer der Messreihe (*Total Time*). Die Anzahl der Messwerte (*Samples*) ergibt sich dann daraus. Zwischen den Methoden kann man mit [F4]{Method1} bzw. [F5]{Method2} umschalten.



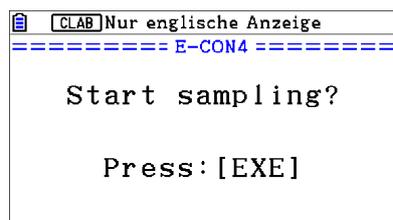
Messmethode 2

Stellen Sie in Methode 2 die gezeigten Werte ein. Wählen Sie mit dem Cursor die Zeile. Mit der Cursor-Rechts-Taste oder [EXE] kommen Sie in das Eingabefenster.

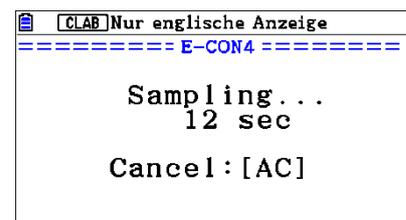
Wechseln Sie mit [EXIT] wieder in die Kanal-Übersicht und starten Sie die Messung mit [F5]{START}. Bestätigen Sie den Bildschirm mit [EXE]. Das C-LAB wird konfiguriert und Sie können die Messung mit [EXE] starten.



Weiter mit [EXE]



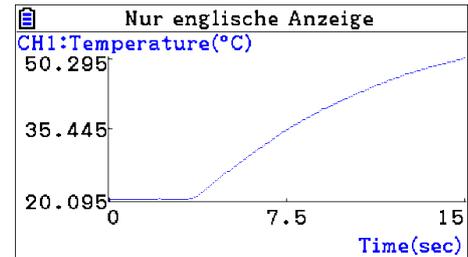
Weiter mit [EXE]



Die Messung läuft

Stellen Sie etwa 3-4 Sekunden nach Beginn der Messung den Temperatursensor in eine Tasse mit heißem Wasser (Kaffee oder Tee tun es auch).

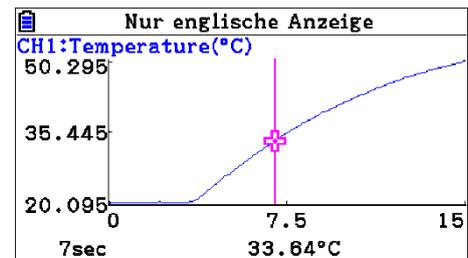
Nach Beenden der Messung werden die Daten grafisch dargestellt.



Ergebnis

Für eine erste Analyse des Graphen haben Sie folgende Möglichkeiten:

[F1]{Trace}: Der Graph kann mit einem F adenkreuz abgetastet werden. Die Koordinaten der einzelnen Messwerte werden unten am Bildschirm angezeigt.



Untersuchung mit Trace

[F2]{Zoom}: Sie können den Graphen vergrößern bzw verkleinern.

Mit den Cursor-Tasten können Sie den Graphen verschieben.

[F3]{V-Window}: Hier kommen Sie mit [F2]{FULL} wieder in die ursprüngliche Ansicht zurück.

Mit [EXIT] gelangen Sie jeweils wieder in das vorherige Fenster.

## 2.4 Einstellen eines Triggers

Einen Trigger kann man als Startknopf betrachten, mit dem man ein Ereignis auslöst. In unserem Fall startet der Trigger die Messung. Gehen Sie mit {EXIT} (ggf. mehrmals) in die Kanalübersicht. Von dort kommen Sie mit [F2]{CONFIG} und [F6]{TRIGGER} in das Trigger-Menü. Am unteren Rand sehen Sie vier Optionen:

**EXE:** Start mit der [EXE]-Taste des fx-CG50.

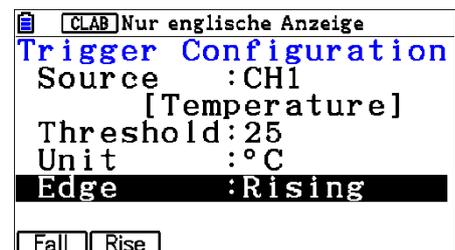
**Cont:** Start nach einer voreingestellten Zeit. Beim Countdown ertönt jede Sekunde ein Ton.

**CH1~3:** Start beim Über- oder Unterschreiten eines eingestellten Schwellwertes auf einem Kanal.

**START:** Start mit dem Einschaltknopf des C-LAB.



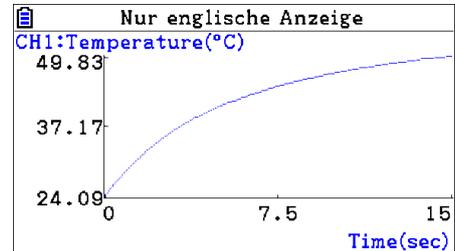
Die Temperaturmessung soll gestartet werden, wenn die Temperatur 25°C überschreitet. Da die Temperatur steigt, muss die Flanke (*Edge*) auf steigend (*Rising*) eingestellt werden. Starten Sie jetzt die Messung aus der Kanal-Übersicht mit [F6]{START}, und bestätigen Sie den ersten Bildschirm mit [EXE].



Die Messstatus-LED (rechts) leuchtet blau. Nach der Konfiguration erscheint die Aufforderung „Start sampling?“, die Sie mit [EXE] bestätigen müssen. Die LED blinkt nun blau, aber sonst passiert zunächst nichts.

Tauchen Sie nun den Temperatursensor in das warme Wasser.

Wenn die Triggerschwelle erreicht ist, blinkt die LED grün, d.h. dass jetzt gemessen wird. Hört das Blinken auf, müssen Sie noch mit [EXE] das Ende der Messung bestätigen und erhalten den Graphen. Man sieht, dass die Messung bei ca. 25°C beginnt.

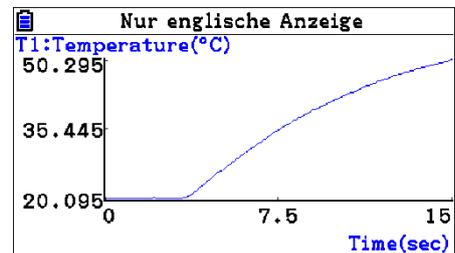


## 2.5 Übertragen von Messwerten in Listen

Für die Auswertung und spätere Weiterverarbeitung können die Messwerte in den Listenspeicher des Statistik-Bereichs (Listeneditor) kopiert werden. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn die Schüler den Umgang mit Listen gewohnt sind. Listen können schnell auf andere Rechner übertragen werden, sodass mehrere Schüler mit den gleichen Daten arbeiten können.

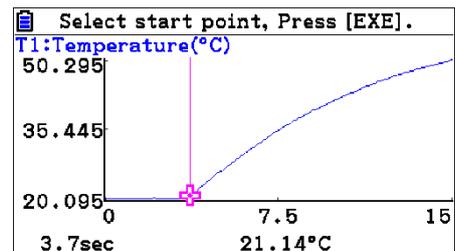
Wiederholen Sie die Messung aus 2.3.

Aus den dargestellten Messwerten, soll ein Ausschnitt ausgewählt und die Daten in die Listen 3 und 4 kopiert werden. Der Ausschnitt soll mit der ansteigenden Flanke beginnen und 8 Sekunden lang sein.

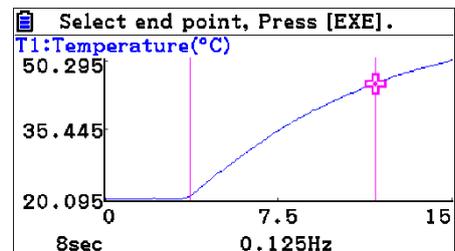


Aktivieren Sie mit [OPTN] [F2]{MEMORY} [F1]{LISTMEM} [F2]{SELECT} die Daten-Auswahl.

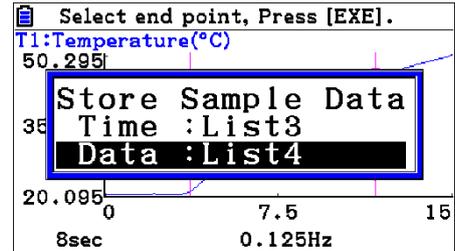
Es erscheint ein Fadenkreuz, das Sie mit den Cursor-Tasten steuern können, um den linken Rand der Auswahl zu markieren können.



Drücken Sie anschließend [EXE] und steuern Sie das Fadenkreuz auf den rechten Rand. In der Anzeige unten links sehen Sie den zeitlichen Abstand der beiden Markierungen. Die angegebene Frequenz (0.125Hz) hat hier keine Bedeutung.



Drücken Sie anschließend wieder [EXE]. Sie müssen nun die Listen auswählen. Wählen Sie mit den Cursor-Tasten die Zeile aus und drücken Sie dann die Cursor-Rechts-Taste und noch einmal, um ans Ende der Zeile zu gelangen. Löschen Sie die Nummer mit [DEL] und geben Sie die neue Nummer ein.



Dann mit [EXE] die Eingabe bestätigen und am Schluss nochmals [EXE], um die Daten zu speichern. Nach der „Complete!“-Anzeige mit [EXIT] zurück.

Im Listeneditor befinden sich nun die Messwerte in den Listen 3 und 4.

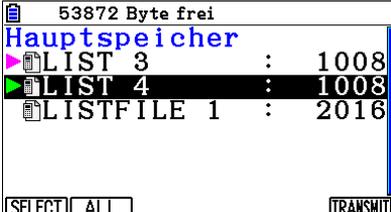
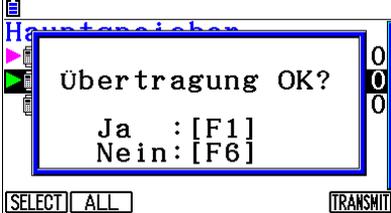
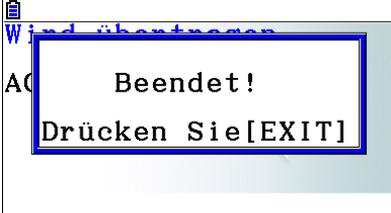
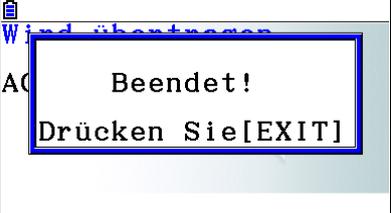
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB			TIME	Temper
1			3.7	21.14
2			3.8	21.465
3			3.9	21.845
4			4	22.29

## 2.6 Datenübertragung zwischen zwei Rechnern

Die beiden Listen **List 3** und **List 4**, die sich auf dem Rechner 1 (Sender) befinden, sollen auf den Rechner 2 (Empfänger) übertragen werden. Verbinden Sie die beiden Rechner mit dem dreipoligen Klinkenkabel.



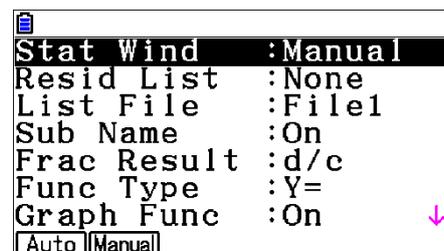
Arbeitsschritte	Rechner 1 (Sender)	Rechner 2 (Empf.)
Gehen Sie auf beiden Rechnern mit [MENU] ins Hauptmenü und wählen Sie dort die App „LINK“ aus. Stellen Sie den Kabeltyp auf „3pin“.		
Wählen Sie auf dem Empfänger [F2]{RECV}. Dies muss geschehen, <u>bevor</u> der Sender seine Daten sendet!		Empfang . . . AC : Abbrechen
Führen Sie dann auf dem Sender folgende Schritte durch: [F1]{TRANSMIT} [F1]{Hauptspeicher} [F1]{Wählen} Mit Cursor auf <i>Listfile</i> und [EXE]		

<p>Listen mit [F1]{SELECT} markieren.</p>		
<p>Starten Sie mit [F6]{TRANSMIT} die Datenübertragung und bestätigen Sie die Sicherheitsabfrage mit [F1]. Ggf. ein Überschreiben genehmigen.</p>		
<p><b>Fertig!</b></p>		

## 2.7 Auswertung von Daten

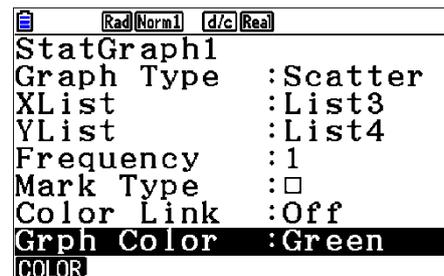
Die Daten in den Listen 3 und 4 (s. 2.5) sollen nun ausgewertet werden. Wechseln Sie dazu mit [MENU] [2]{STAT} in den Listeneditor. Bevor die Daten grafisch dargestellt werden, sind einige Einstellungen nötig.

Um volle Kontrolle zu haben, soll das Grafik-Fenster manuell eingestellt werden. Wechseln Sie mit [SHIFT] [MENU]{SETUP} in das Setup, stellen Sie Das Statistikfenster (*Stat Wind*) mit [F2]{Manual} auf manuelle Einstellung. Wenn Sie in der Setup-Liste weiter nach unten scrollen, sehen Sie, dass hier viele

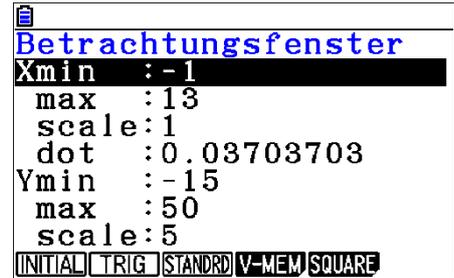


weitere Einstellungen vorgenommen werden können, unter anderem die Anzeige der Achsen und eines Gitters (Grid). Kehren Sie mit [EXE] in den Listeneditor zurück.

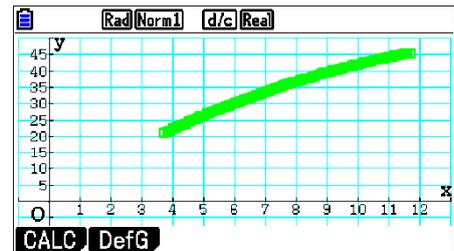
Gehen Sie mit [F1]{GRPH} [F6]{SET} zum Grapheneditor und stellen Sie dort die angegebenen Werte ein. Dazu müssen Sie nach unten scrollen, da das Fenster vergrößert dargestellt ist. Mit [EXE] kommen Sie wieder in den Listeneditor.



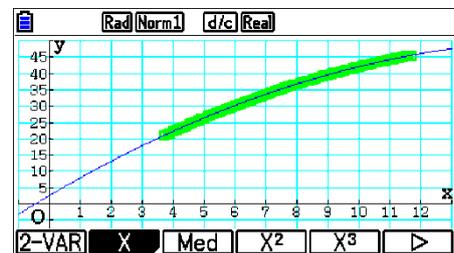
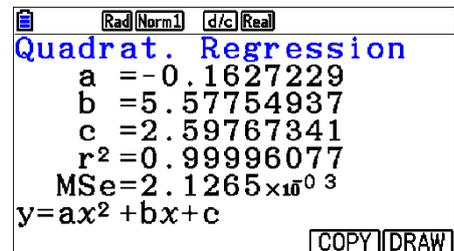
Nun muss noch das Koordinatensystem angepasst werden. Die x-Werte liegen im Bereich von 3 bis 12 und die y-Werte etwa zwischen 20 und 50. Wechseln Sie mit [SHIFT][F3]{V-Window} in die Fenstereinstellungen und stellen Sie dort die angegebenen Werte ein. Dazu müssen Sie wieder nach unten scrollen. Mit [EXE] kommen Sie zurück in den Listeneditor.



Schalten Sie nun mit [F1]{GRAPH1} in das Koordinatensystem um. Sie sehen den Graphen als Punktwolke (Scatterplot). Die Markierungen sind leider etwas dick und lassen sich in der Größe nicht ändern.



Sie können nun mit [F1]{CALC} eine Regression durchführen oder mit [F2]{DefG} in den Funktionseditor (auch erreichbar mit [MENU] [5]{GRAPH}) wechseln und eine Funktionsgleichung eingeben, deren Graph dann gezeichnet wird. Wählen Sie mit [F1]{CALC} [F4]{X<sup>2</sup>} eine quadratische Regression aus. Die Ergebnisse der Regression werden angezeigt. Mit [F5]{COPY} können Sie die Funktion in den Funktionseditor kopieren. Gehen Sie aber zunächst mit [F6]{DRAW} in den Grafik-Bildschirm. Das Ergebnis ist überraschend gut, was wohl an dem kleinen Ausschnitt liegt. Aus physikalischen Gründen ist eher beschränktes Wachstum zu erwarten.



Wiederholen Sie die Regression und kopieren Sie die Funktion mit [F1]{COPY} ins Funktionsmenü. Gehen Sie dort mit dem Cursor auf die Funktion Y2 und drücken Sie [EXE]. Gehen Sie dann mit [MENU] [5]{Graph} ins Funktionsmenü. Dort können Sie Farbe und Linienstil wählen.



Wechseln Sie mit [MENU] [2]{Statistik} zurück und schalten Sie mit [F1]{GRAPH} [F1]{GRAPH1} in das Koordinatensystem um. Drücken dann [F1]{DefG}, markieren Sie ggf. Y1 und drücken Sie [F6]{DRAW}. Der Graph ist nun rot und die Linie etwas dicker.



## 3. Experimente

### 3.1 Die Fall-Leiter

Eine Leiter mit jeweils 1 cm breiten Sprossen und Lücken fällt durch eine Lichtschranke. Dabei wird ein Zeit-Helligkeits-Diagramm aufgezeichnet. Mit Hilfe der Messwerte soll der Fallprozess modelliert werden.

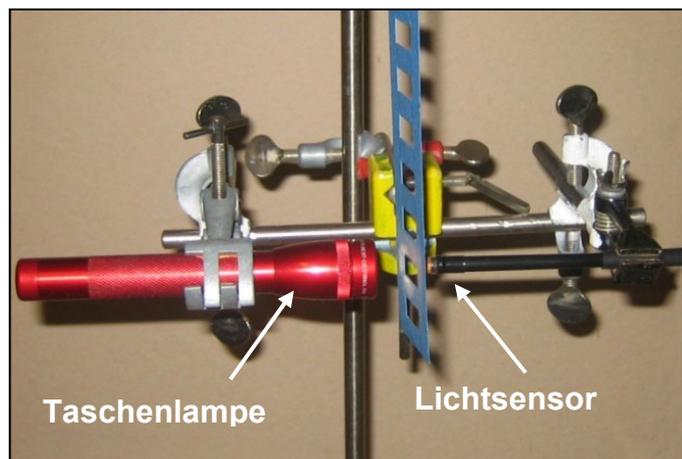
#### Unterrichtseinsatz

**Physik:** freier Fall, Bewegungsgesetze

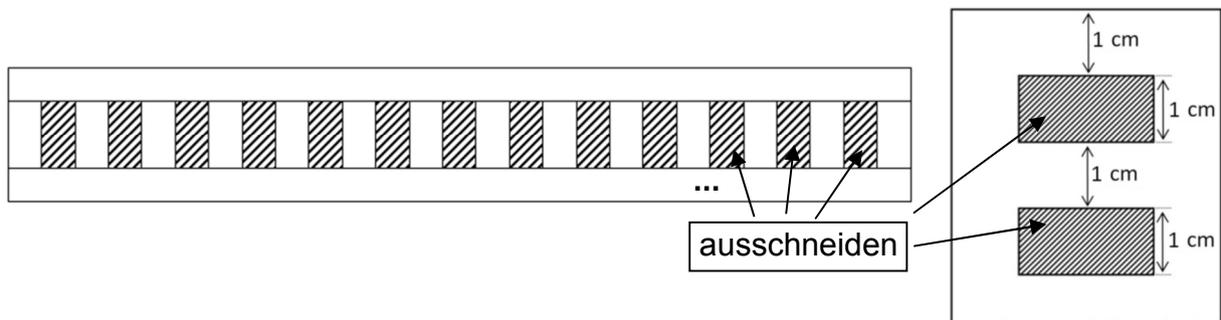
**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, quadratische Funktionen, Differenzialgleichungen

#### Material

- Fall-Leiter aus Karton<sup>2</sup>
- Taschenlampe
- Stativmaterial
- C-LAB
- Lichtsensor



Versuchsaufbau



Eine Fall-Leiter lässt sich aus festem Karton leicht selbst herstellen<sup>2</sup>. Möglicherweise findet man eine solche Leiter auch in der Physiksammlung.

<sup>2</sup> Kopiervorlage im Anhang C

## Vorbereitung

Verbinden Sie den fx-CG50 unter Verwendung des Dreipolkabels mit dem CASIO-GC-Eingang des C-LAB und belegen Sie Kanal 1 mit dem Lichtsensor. Rufen Sie im Hauptmenü E-CON4 auf und wählen Sie bei den CASIO-Sensoren den Lichtsensor (Optical) aus, falls er nicht automatisch erkannt wird. Achten Sie darauf, dass der Lichtsensor möglichst wenig Streulicht von anderen Quellen erhält.

Da die Leiter recht schnell durch die Lichtschranke fällt, ist der Messvorgang kurz. Die gesamte Messung dauert nur 1-2 Zehntelsekunden. Deshalb kann sie nicht von Hand gestartet werden, sondern soll automatisch beim ersten Hell-Dunkel-Wechsel beginnen. Dazu verwenden wir einen Trigger.

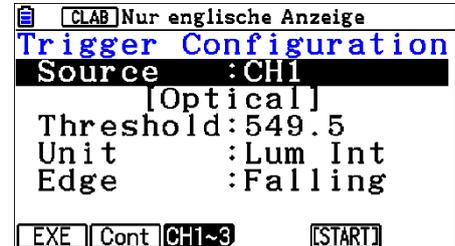
Der Streifen muss mit seiner Längsachse senkrecht nach unten fallen. Wenn er verkanntet, sind die Ergebnisse verfälscht. Man muss eine ruhige Hand haben und ggf. mehrere Versuche durchführen.

Konfigurieren Sie das C-LAB nach Methode 2 mit den gezeigten Werten (→ 2.3).

Als nächstes müssen Sie den Trigger einstellen.



Schalten Sie die Taschenlampe an. Sie sehen nun den gemessenen Helligkeitwert. Verdecken Sie den Strahlengang mit einer Sprosse der Fall-Leiter. Die Triggerschwelle sollte dann etwas höher als der jetzt gemessene Wert liegen. Der voreingestellte Wert von 549,5 Lumen passt vermutlich.

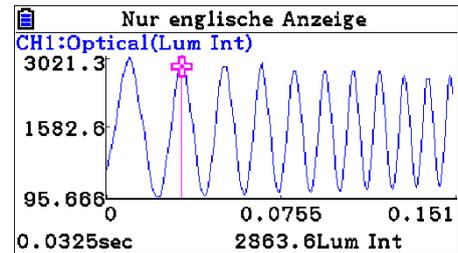


## Messung

Starten Sie die Messung wie in Abschnitt 2.3 beschrieben. Lassen Sie die Leiter knapp über dem Helligkeitssensor durch die Lichtschranke fallen. Wenn der Trigger auslöst, ertönt ein Signal, nach Beendigung der Messung ebenfalls. Ist dies nicht der Fall, lassen Sie die Leiter erneut fallen oder erhöhen Sie die ggf. Triggerschwelle.

## Auswertung

Nach der Beendigung mit [EXE] erscheint die grafische Darstellung der Messwerte. Mit [SHIFT][F1]{TRACE} können Sie den Graphen abfahren und die Maxima bestimmen. Die Koordinaten können Sie am unteren Bildschirmrand ablesen. Der Zoom-Modus (→ 2.3) ist hier hilfreich.

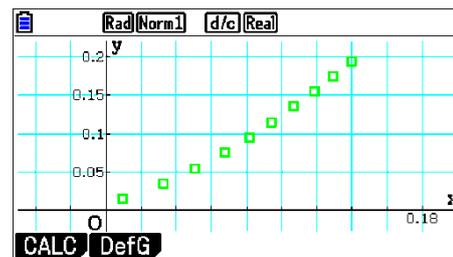


Im Beispiel wurden folgende Werte gemessen:

Zeit (s)	0,0095	0,0325	0,0505	0,0675	0,0815	0,0945	0,107	0,1185	0,129	0,1395
Weg (m)	0,015	0,035	0,055	0,075	0,095	0,115	0,135	0,155	0,175	0,195

Als Nullpunkt der Weg-Achse legen wir die untere Kante der Fall-Leiter fest. Das erste Helligkeitsmaximum liegt also bei 0,015 m. Legen Sie eine entsprechende Tabelle an und erstellen Sie einen Plot (Hier:  $x = -0,05..0,17$ ;  $y = -0,06..0,22$ ).

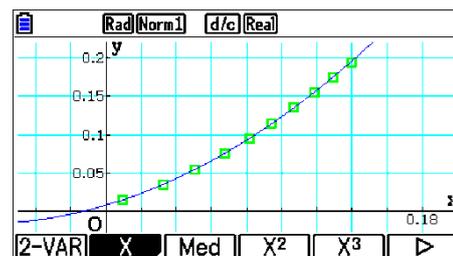
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	ZEIT	WEG		
1	9.5E-3	0.015		
2	0.0325	0.035		
3	0.0505	0.055		
4	0.0675	0.075		



Führen Sie nun mit [CALC][F4]{X<sup>2</sup>} eine quadratische Regression durch.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	ZEIT	WEG		
1	9.5E-3	0.015		
2	0.0325	0.035		
3	0.0505	0.055		
4	0.0675	0.075		

**Quadrat. Regression**  
 $a = 4.7395491$   
 $b = 0.67994211$   
 $c = 8.0805 \times 10^{-3}$   
 $r^2 = 0.99997225$   
 $MSe = 1.3079 \times 10^{-7}$   
 $y = ax^2 + bx + c$



## Interpretation

Bei unserem Experiment wurde der von der Fall-Leiter zurückgelegte Weg in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Die Regressionsfunktion beschreibt dabei den Ort der unteren Kante der Fall-Leiter als Funktion der Zeit. Der freie Fall ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, d.h., die Beschleunigung bleibt konstant. Mit den in der Physik üblichen Bezeichnungen

$a$  : Beschleunigung in  $\text{m/s}^2$   
 $s$  : Weg in  $\text{m}$

$v$  : Geschwindigkeit in  $\text{m/s}$   
 $t$  : Zeit in  $\text{s}$

ergibt sich<sup>3</sup>

$$a(t) = g$$

Mit den Zusammenhängen

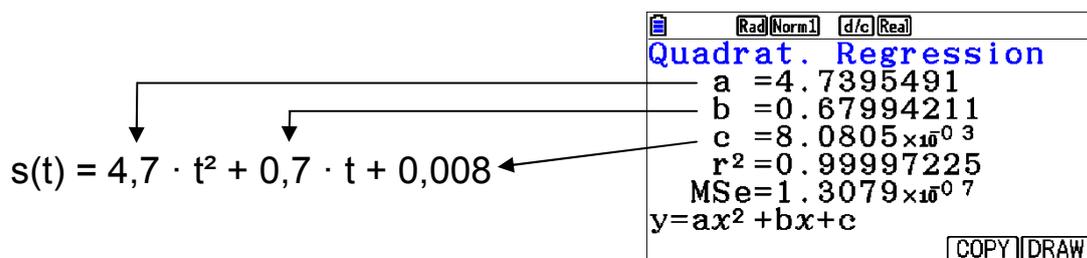
$$v(t) = s'(t) \quad \text{und} \quad a(t) = v'(t) = s''(t)$$

erhält man durch Integration mit den Randbedingungen  $v_0 := v(0)$  und  $s_0 := s(0)$

$$\text{Geschwindigkeitsfunktion} \quad v(t) = \int a(t)dt = \int gdt = gt + v_0$$

$$\text{Ortsfunktion} \quad s(t) = \int v(t)dt = \int (g \cdot t + v_0)dt = \frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Wir können nun die Regressionsfunktion physikalisch interpretieren. Mit gerundeten Werten lautet sie (ohne Einheiten):



Der Koeffizient 4,7 entspricht dem halben Ortsfaktor. Somit ergibt sich aus der Messung für den Ortsfaktor ein Wert von  $g = 9,4 \text{ m/s}^2$ . Die Abweichung von Präzisionsmessungen ( $9,81 \dots \text{ m/s}^2$ ) ist mit 4 % recht gering.

Da die Leiter etwas oberhalb der Lichtschranke losgelassen und die Triggerschwelle erst nach ca. 8 mm ausgelöst wurde, hatte die Leiter beim Start der Messung bereits eine Anfangsgeschwindigkeit von  $0,7 \text{ m/s}$ .

Der Wert 0,008 bedeutet, dass die Unterkante zu Beginn der Messung bereits einen Weg von 8mm zurückgelegt hat. Das liegt daran, dass die Lichtschranke abgedunkelt werden muss, um die Triggerschwelle zu erreichen. Da sie knapp über der maximalen Verdunklung eingestellt wurde, muss die Unterkante möglicherweise die Hälfte der Sprossenbreite zurücklegen, also etwa 5mm. Offensichtlich gibt es aber noch weitere Fehlerquellen.

<sup>3</sup> Die Konstante  $g$  wird auch als Ortsfaktor bezeichnet und beträgt an der Erdoberfläche etwa  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

## 3.2 Der springende Ball

Ein Ball wird aus ca. 0,6m Höhe fallen gelassen. Ein darüber angebrachter Bewegungssensor nimmt ein Zeit-Abstands-Diagramm auf. Gut geeignet ist ein Basketball, da er wegen der großen Oberfläche auch bei leicht seitlichem Verspringen das Ultraschallsignal noch gut reflektiert. Die Abnahme der Sprunghöhe soll untersucht werden.

Mit den gleichen Daten wird später der freie Fall untersucht (→ 3.3).

### Unterrichtseinsatz

**Physik:** freier Fall, Bewegungsgesetze, Energieerhaltung

**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, quadratische Funktionen, Exponentialfunktionen, Differenzialgleichungen

### Material

- Basketball
- Stativmaterial
- C-LAB
- Motion-Sensor (Ultraschall-Bewegungssensor)



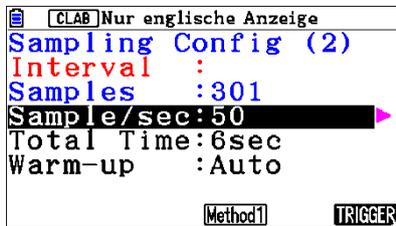
### Vorbereitung

Verbinden Sie den fx-CG50 unter Verwendung des Dreipolkabels mit dem CASIO-GC-Eingang des C-LAB und belegen Sie Kanal 1 mit dem Motion-Sensor. Rufen Sie im Hauptmenü E-CON4 auf und wählen Sie bei den CMA-Sensoren den Motion-Sensor aus, falls er nicht automatisch erkannt wird.

Befestigen Sie den Motion-Sensor ca. 80cm über dem Boden so, dass der Ball unter dem Sensor ungehindert fallen kann. Es passiert leicht, dass der Ball trotz senkrechtem Fall etwas schräg zurückspringt, so dass er nach wenigen Sprüngen nicht mehr erfasst wird. Da der Ball nicht exakt ausgewuchtet ist, dreht er sich meist beim Sprüngen etwas. Nach einigen Sprüngen behält er aber eine gewisse Lage bei. In dieser Lage sollte man ihn fallen lassen. Man muss in der Regel mehrere Versuche durchführen, bis man brauchbare Messwerte hat.

Damit der Ball möglichst kurz nach Beginn der Messung losgelassen werden kann, stellen wir im Trigger einen Countdown ein. Sie können aber auch eine Triggerschwelle verwenden, die beim Überschreiten eines bestimmten Abstandes die Messung startet.

Nehmen Sie folgende Einstellungen vor (→ 2.3):



Konfigurieren mit Methode 2



Counter konfigurieren



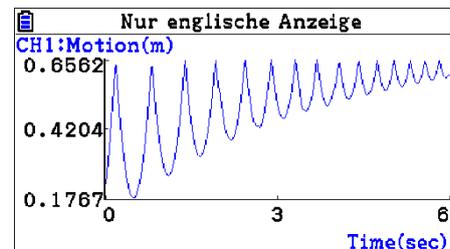
Trigger konfigurieren

## Messung

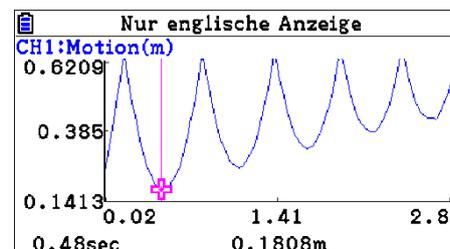
Starten Sie die Messung wie in Abschnitt 2.3 beschrieben. Halten Sie den Ball unter den Motion-Sensor und starten Sie mit [EXE] die Messung. Wenn Sie eine Triggerschwelle gewählt haben, dann lassen Sie den Ball einfach los. Im Falle des Counters hören Sie fünf längere Töne, beim sechsten (kurzen) beginnt die Messung. Lassen Sie in diesem Moment den Ball fallen.

## Auswertung

Das Ergebnis sollte etwa wie in der Abbildung aussehen. Gegebenenfalls wiederholen Sie das Experiment. Mit den Cursorstasten können Sie das Bildschirmfenster auf dem Zeichenblatt verschieben und mit [SHIFT][F2]{Zoom} können Sie in x- und y-Richtung hinein- und herauszoomen. Mit [SHIFT][F3]{V-Window}[F3]{Full} kommen Sie immer wieder in die optimale Fenstergröße zurück.



Die Tiefpunkte bezeichnen jeweils den geringsten Abstand zum Sensor, also die maximale Höhe im jeweiligen Sprung. Im Spur-Modus (Trace) können Sie den Graphen absuchen und die Koordinaten der Tiefpunkte ermitteln. Dabei hilft ein Zoom in x-Richtung (→ 2.3).



Wechseln Sie dann mit [SHIFT][F1]{TRACE} in den Spur-Modus und legen Sie eine (schriftliche) Tabelle mit den y-Koordinaten der Tiefpunkte an. Die Koordinaten können Sie am unteren Bildschirmrand ablesen.

In dem Beispiel wurden folgende Werte gemessen (in s):

Abstand in m	0,181	0,260	0,325	0,383	0,430	0,457	0,483	0,503
Abstand in m	0,524	0,542	0,555	0,568	0,579	0,590	0,599	

Geben Sie die Daten in eine Liste ein. Die erste Spalte enthält die Nummer der Messung und die zweite die gemessenen Abstände zum Motion-Sensor. Um die Höhe zu berechnen, muss man den tiefsten Punkt, also den größten Abstand zum Sensor ermitteln. Dazu kann man den Ball einfach unter den Motion-Sensor legen.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	NR	ABST	HOEHE	
1	1	0.181	0	
2	2	0.26		
3	3	0.325		
4	4	0.383		

0.646-List 2

Er liegt hier etwa bei 0,646 m. Davon müssen die y-Koordinaten der Tiefpunkte subtrahiert werden. Gehen Sie mit dem Cursor auf **List 3** und geben Sie ein:

0,646 – [SHIFT][1]{List} 2 [EXE]

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	NR	ABST	HOEHE	
1	1	0.181	0.465	
2	2	0.26	0.386	
3	3	0.325	0.321	
4	4	0.383	0.263	

0.465

GRAPH | CALC | TEST | INTR | DIST | ▶

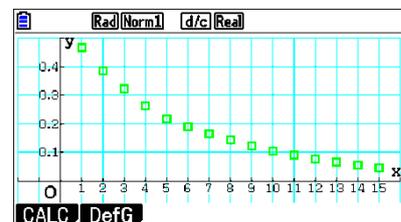
Passen Sie das Koordinatensystem an und stellen Sie die Sprunghöhen grafisch dar. Das Ergebnis sollte etwa wie gezeigt aussehen.

	Rad(Norm1)	d/c(Real)
<b>StatGraph1</b>		
Graph Type	: Scatter	
XList	: List1	
YList	: List3	
Frequency	: 1	
Mark Type	: □	
Color Link	: Off	↓

GRAPH1 | GRAPH2 | GRAPH3

	Rad(Norm1)	d/c(Real)
<b>Betrachtungsfenster</b>		
Xmin	: -2	
max	: 16	
scale	: 1	
dot	: 0.04761904	
Ymin	: -0.15	
max	: 0.5	

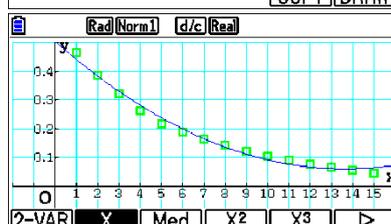
INITIAL | TRIG | STANDRD | V-MEM | SQUARE



Wir führen nun verschiedene Regressionen durch

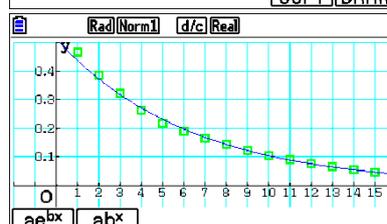
	Rad(Norm1)	d/c(Real)
<b>Quadrat. Regression</b>		
a	= 2.3684 × 10 <sup>-3</sup>	
b	= -0.0646881	
c	= 0.50244615	
r <sup>2</sup>	= 0.98846547	
MSe	= 2.1796 × 10 <sup>-4</sup>	
y	= ax <sup>2</sup> + bx + c	

COPY | DRAW



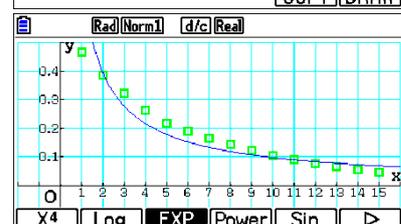
	Rad(Norm1)	d/c(Real)
<b>Exp. Regr. (a · b<sup>x</sup>)</b>		
a	= 0.51079623	
b	= 0.85336394	
r	= -0.9988607	
r <sup>2</sup>	= 0.99772286	
MSe	= 1.236 × 10 <sup>-3</sup>	
y	= a · b <sup>x</sup>	

COPY | DRAW



	Rad(Norm1)	d/c(Real)
<b>Regression-Potenzfkt.</b>		
a	= 0.71586532	
b	= -0.8635035	
r	= -0.9511018	
r <sup>2</sup>	= 0.90459473	
MSe	= 0.05178625	
y	= a · x <sup>b</sup>	

COPY | DRAW



## Interpretation

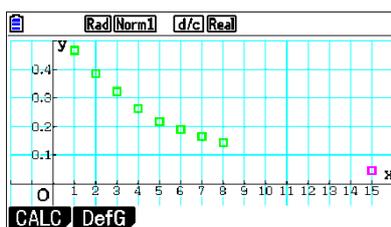
Das quadratische und das exponentielle Modell passen recht gut, die Potenzfunktion ist weniger geeignet. Hinter einem exponentiellen Modell steckt die Annahme, dass der Energieverlust beim teilelastischen Stoß proportional zum Quadrat der Aufprallgeschwindigkeit ist, also auch proportional zur Energie. Die Annahme, dass der Energieverlust proportional zur Auftreffgeschwindigkeit ist, führt auf ein quadratisches Modell. Die genauere Analyse einer solchen Situation findet man in Abschnitt 3.6.

## Variante

In der Praxis spielen Modellierungen z.B. bei Prognosen eine Rolle. In der gezeigten Messreihe wurden 15 Werte aufgenommen. Man könnte z.B. mit Hilfe der ersten 8 Messwerte ein Modell entwickeln, um damit eine Prognose für den 15. Messwert zu erstellen. Dann könnte man die Güte unterschiedlicher Modelle vergleichen.

### Graphische Methode

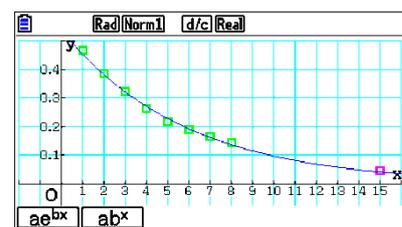
Wir erzeugen aus den ersten 8 Messwerten einen Scatter-Plot in StatGraph1 und mit dem 15. Messwert einen Scatter-Plot in StatGraph2. Dazu wird der Wert 15 in **List 4** und 0,047 in **List 5** eingetragen ( $0,646 - 0,599 = 0,047$ ). Über [F4]{SELECT} müssen dann StatGraph1 und StatGraph2 auf „DrawOn“ gestellt werden. Mit [F1]{CALC} können wir dann eine Regression durchführen. Da es zwei Graphen gibt, müssen wir mit den Cursor-hoch/runter-Tasten das Fadenkreuz auf den entsprechenden Graphen bringen und mit [EXE] bestätigen. Hier schneidet das exponentielle Modell klar besser ab.



Plot mit Kontrollwert



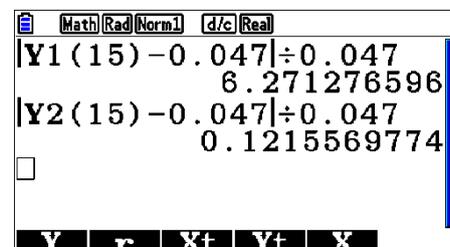
quadratisches Modell



exponentielles Modell

### Algebraische Methode

Wir kopieren die Regressionsfunktionen als Y1 (quadr.) und Y2(exp.) in den Funktionseditor. Im Run-Matrix-Fenster können wir dann mit [VARS] [F4]{GRAPH} [F1]{Y} darauf zugreifen. Wir berechnen jeweils die relative Abweichung und sehen hier beim quadratischen Modell eine Abweichung von mehr als 600%, während es beim exponentiellen Modell nur ca 12% sind.



### 3.3 Freier Fall mit Ball

Dieses Experiment ist identisch mit 3.2. Für die Auswertung wird jedoch nur eine Abwärtsbewegung analysiert.

#### Unterrichtseinsatz

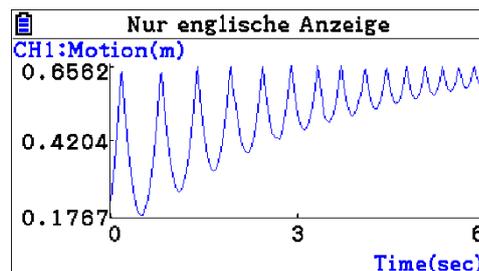
**Physik:** freier Fall, Bewegungsgesetze

**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, quadratische Funktionen, Differenzialgleichungen

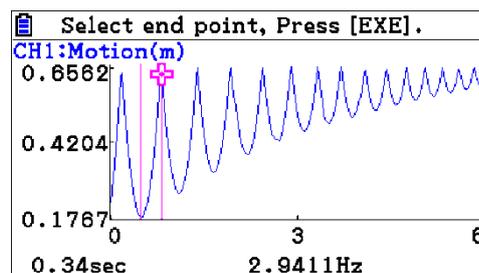
Zur Vorbereitung und Messung s. 3.2.

#### Auswertung

Das Ergebnis sollte etwa wie gezeigt aussehen. Mit den Cursortasten können Sie das Bildschirfenster auf dem Zeichenblatt verschieben und mit [SHIFT][F2]{Zoom} können Sie in x- und y-Richtung hinein- und herauszoomen. Mit [SHIFT][F3]{V-Window}[F3]{Full} kommen Sie immer wieder in die optimale Fenstergröße zurück.



Schneiden Sie aus dem Graphen einen freien Fall des Balls heraus (von einem Minimum zum nächsten Maximum). Mit [OPTN][F2]{LMEM}[F2]{SEL} kommen Sie in den entsprechenden Modus. Markieren Sie den Startpunkt (Minimum) und den Endpunkt (nächstes Maximum). Speichern Sie die Daten in den Listen 1 und 2 (→ 2.5)



Wechseln Sie nun mit [MENU][2]{STAT} in den Listeneditor. Dort sehen Sie jetzt die Messwerte.

Für die weitere Auswertung ist es günstig, das Koordinatensystem so zu legen, dass die Bewegung im Ursprung beginnt. Dazu müssen wir die Messwerte korrigieren. Die neuen Werte schreiben wir in **List 3** und **List 4**.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	TIME	Motion		
1	0.48	0.1808		
2	0.5	0.1814		
3	0.52	0.1842		
4	0.54	0.1909		

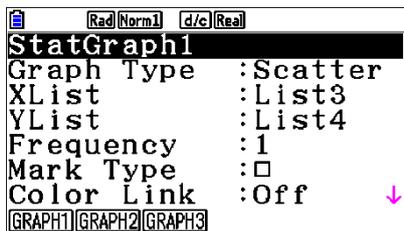
At the bottom of the screen, there are menu options: GRAPH, CALC, TEST, INTR, DIST, and a right arrow button.

Zunächst beschriften wir diese Listen mit T und S. Bringen Sie den Cursor auf das Feld unter **List 3** und drücken Sie [ALPHA][+]{T}[EXE], wiederholen Sie dies für **List 4** mit der Überschrift S. Bringen Sie nun den Cursor auf das Feld **List 3** und geben Sie ein: [SHIFT][1]{List}[1][-] [SHIFT][1]{List}[1] [SHIFT][+]{T}[1] [SHIFT][-]{S}[1] [EXE]. List1[1] ergibt das erste Element von Liste 1.

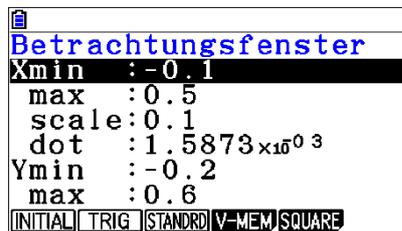
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	TIME	Motion	T	S
1	0.48	0.1808	0	0
2	0.5	0.1814	0.02	
3	0.52	0.1842	0.04	
4	0.54	0.1909	0.06	

List 2-List 2[1]

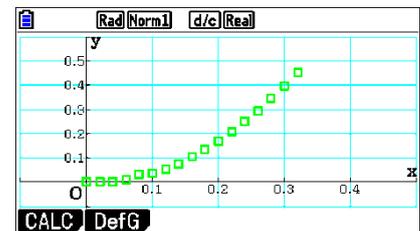
Wiederholen Sie dies, indem Sie in Liste 4 die Werte von Liste 2 um den ersten Wert vermindern. Erstellen Sie anschließend einen Plot.



[F1]{GRPH}[F6]{SET}[EXE]

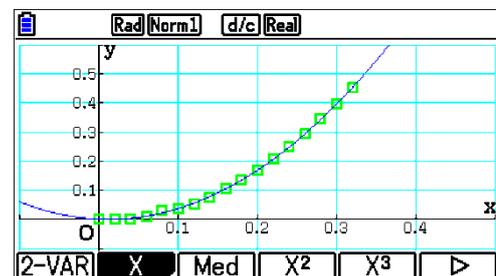
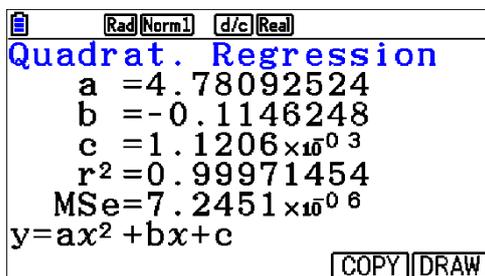


[SHIFT][F3]{V-Window}...[EXE]



[F1]{GRPH}[F1]{GPH1}

Führen Sie nun mit [F1]{CALC}[F4]{X<sup>2</sup>} eine quadratische Regression durch und zeichnen Sie den Graphen mit [F6]{DRAW}. Das Ergebnis sieht gut aus.



## Interpretation

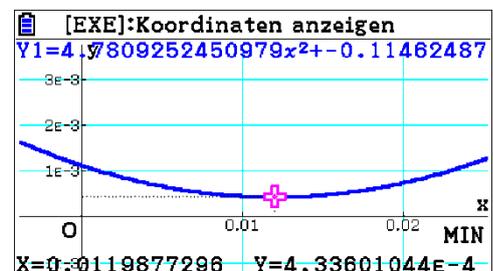
Das Bild zeigt, dass die quadratische Regression sehr gut passt. Zur physikalischen Begründung des quadratischen Zeit-Weg-Gesetzes s. Abschnitt 3.1.

Wandelt man den Funktionsterm in die Scheitelpunktsform um, so erhält man

$$f(x) = 4.78(x - 0,012)^2 + 0,00043$$

Der Scheitelpunkt liegt also nicht im Ursprung, sondern etwa bei S(0,012|0,00043).

Das bedeutet, dass der erste Messwert noch kurz vor dem höchsten Punkt des Balls lag. Der in diesem Experiment ermittelte Ortsfaktor von  $g = 8,56 \text{ m/s}^2$  ist etwas zu gering (Abweichung <5%). Eine mögliche Ursache wäre der Luftwiderstand oder der nicht genau bekannte Messfehler.



### 3.4 Entladung eines Kondensators

Ein Kondensator wird aufgeladen und anschließend über einen Widerstand entladen. Dabei wird die Spannung am Widerstand gemessen. Sie ist nach dem Ohm'schen Gesetz  $U = R \cdot I$  proportional zum Entladestrom.

#### Unterrichtseinsatz

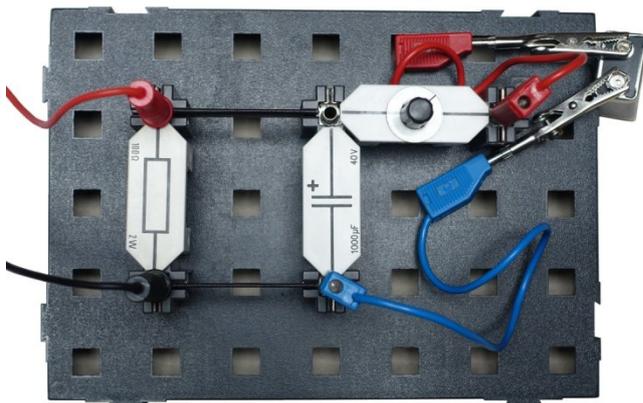
**Physik:** elektrisches Feld, Plattenkondensator, Elektronik

**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, Exponentialfunktionen, Differenzialgleichungen

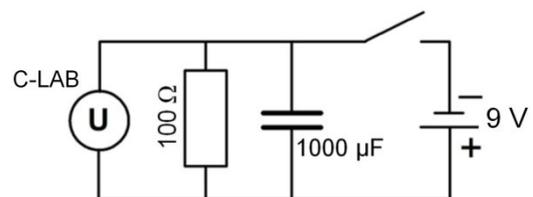
#### Material

- Steckbrett
- Spannungsquelle ca. 9 V
- Kondensator 1000  $\mu\text{F}$
- Widerstand 100  $\Omega$
- C-LAB
- Spannungs-Sensor

#### Vorbereitung



Aufbau

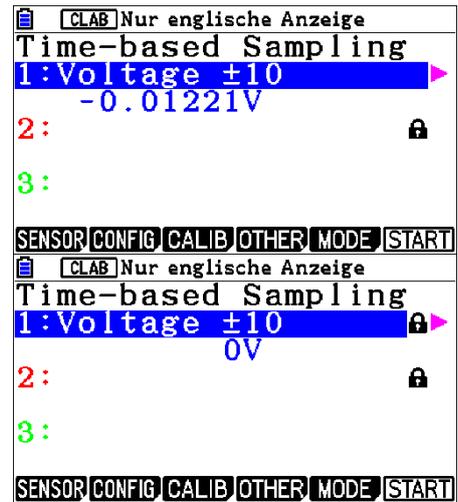


Schaltbild

Bauen Sie die Schaltung gemäß dem Schaltbild auf.

Verbinden Sie den fx-CG50 unter Verwendung des Dreipolkabels mit dem CASIO-GC-Eingang des C-LAB und belegen Sie Kanal 1 mit dem Spannungs-Sensor. Rufen Sie im Hauptmenü E-CON4 auf und wählen Sie bei den Casio-Sensoren den Spannungssensor (Voltage) aus, falls er nicht automatisch erkannt wird.

Vor der Messung muss bei dem Spannungs-Sensor noch der Nullpunkt eingestellt werden. Öffnen Sie dazu den Schalter. Drücken Sie dann [F3]{CALIB} und [F3]{ZERO}. Warten Sie, bis die Anzeige einigemaßen stabil ist und drücken Sie [EXE] und [F6]{SET}. Dann kehren Sie mit [EXIT] in die Kanalübersicht zurück. Der gemessene Spannungswert sollte nun nahe der Null liegen.

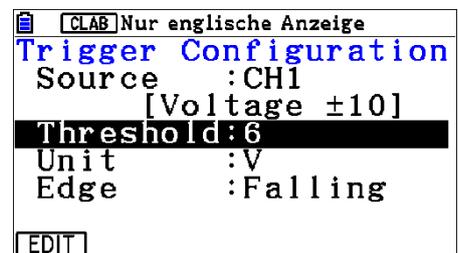


Schließen Sie den Stromkreis. Der fx-CG50 zeigt die angelegte Spannung an.

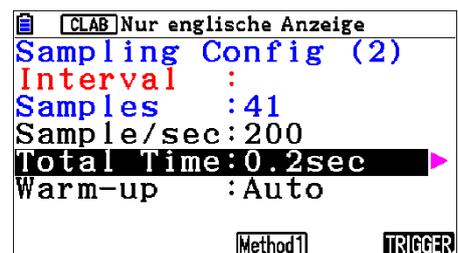
Da die Messung recht schnell verläuft (0,2 Sekunden), verwenden wir einen Trigger.



Die Messung soll bei Unterschreitung eines Schwellenwertes (hier 6V) starten. Dieser Wert muss unter dem Wert der Spannungsquelle liegen (hier 7,99V).



Bei Methode 1 wird durch die Zeitauflösung (0,005s bzw. 200 Punkte pro Sekunde) und die Anzahl der Messwerte (41) die Dauer der Messung festgelegt (0,2s) (→ 2.3).



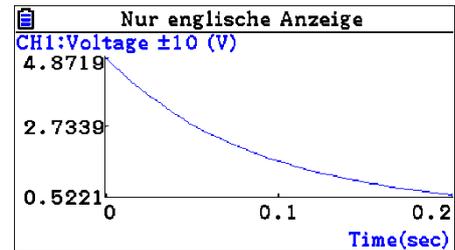
## Messung

Bei geschlossenem Schalter wird der Kondensator aufgeladen. Wenn Sie den Schalter öffnen, wird der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt und entlädt sich. Dabei fließt ein Strom über den Widerstand, der dort über das C-LAB als Spannungsabfall gemessen wird.

Starten Sie die Messung wie in Abschnitt 2.3 beschrieben. Öffnen Sie den Schalter. Ein Signalton ertönt, wenn die Messung beginnt und ein zweiter, wenn sie beendet ist. Drücken Sie dann [EXE].

## Auswertung

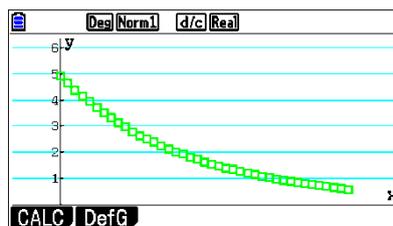
Das Ergebnis könnte etwa wie dargestellt aussehen. Übertragen Sie die Daten mit [OPTN][F2]{LMEM}[F1]{ALL} in die Listen 1 und 2.



Schalten Sie mit [MENU][2]{STAT} in den Listeneditor um.

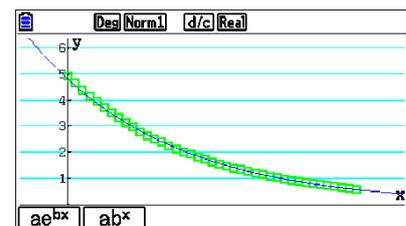
Erzeugen Sie nun den Graphen als Scatterplot und finden Sie eine passende Regressionsfunktion (vgl. Abschnitt 2.7).

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	TIME	Voltage		
1	0	4.9035		
2	5E-3	4.6402		
3	0.01	4.3875		
4	0.015	4.1505		



```

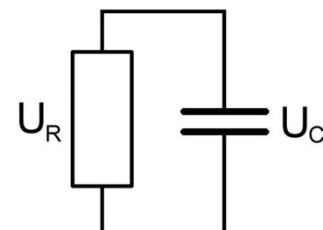
Exp. Regr. (a · ebx)
a = 4.78393537
b = -10.538328
r = -0.9997739
r2 = 0.99954788
MSE = 1.8483 × 10-4
y = a · ebx
    
```



Ein exponentielles Modell der Form  $y = a \cdot e^{bx}$  passt sehr gut.

## Interpretation

Betrachten wir den geladenen Kondensator: Von der einen Platte fließen die Ladungen über den Widerstand zur anderen Platte, der Kondensator entlädt sich. Während dieses Vorgangs liegen an den beiden Bauteilen die Spannungen  $U_R$  und  $U_C$  an.



Wegen der Maschenregel gilt:  $U_R + U_C = 0$

Außerdem gilt:  $U_C = \frac{Q}{C}$  und  $U_R = R \cdot I$

(R: Widerstand; Q: Ladung auf dem Kondensator; I: Entladestrom; C: Kapazität)

Dabei sind  $U_C$ ,  $U_R$ ,  $Q$  und  $I$  zeitabhängige Größen, also Funktionen  $U_C(t)$ ,  $U_R(t)$ ,  $I(t)$  und  $Q(t)$ , wobei der Strom die Änderungsrate der Ladung ist:  $I(t) = Q'(t)$ .

Aus der Maschenregel ergibt sich eine Differenzialgleichung:

$$U_R(t) + U_C(t) = R \cdot Q'(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \Rightarrow Q'(t) = -\frac{1}{RC} Q(t)$$

mit der Lösung  $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$

Für den Strom gilt dann  $I(t) = Q'(t) = -\frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} = -I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$

Im Experiment wurde die Spannung am Widerstand gemessen.

Es gilt  $U_R(t) = R \cdot I(t) = -R \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} = -U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$

Das negative Vorzeichen rührt daher, dass  $U_R$  und  $U_C$  entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Mit den auf den Bauteilen angegebenen Werten gilt

$$\frac{1}{RC} = \frac{1}{100\Omega \cdot 1000\mu\text{F}} = \frac{1}{100\Omega \cdot 0,001\text{F}} = 10\text{s}^{-1} \quad (\text{für die Einheiten gilt } \Omega \cdot \text{F} = \text{s})$$

Der aus dem Experiment ermittelte Wert war  $\frac{1}{RC} = 10,5\text{s}^{-1}$ . Da die Bauteile eine Toleranz von ca. 5-10 % haben, liegt die Abweichung von 5 % im Rahmen der Messgenauigkeit.

## 3.5 Abkühlung

### Worum es geht

Ein Temperatur-Sensor wird in eine Tasse mit heißem Wasser gestellt. Nachdem er die Umgebungstemperatur erreicht hat, wird er in kaltes Wasser gebracht und die Abkühlung des Messfühlers aufgezeichnet. Hat man mehr Zeit (ca. 20-30 Minuten), kann man auch die Abkühlung des heißen Wassers in der Tasse untersuchen.

### Unterrichtseinsatz

**Physik:** Wärmelehre, Entropie

**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, Exponentialfunktionen, Differenzialgleichungen

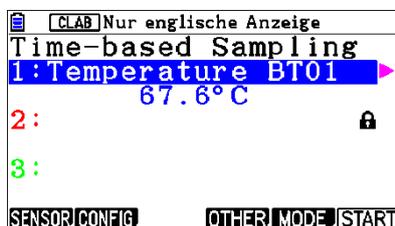
### Material

- 2 Kaffeetassen
- C-LAB
- Temperatur-Sensor



### Vorbereitung

Füllen Sie eine der Tassen mit kochendem und die andere mit kaltem Wasser. Verbinden Sie den fx-CG50 und den Master-Eingang des C-LAB mit dem Dreipolkaabel und belegen Sie den Kanal CH1 mit dem Temperatur-Sensor. Rufen Sie im Hauptmenü E-CON4 auf, wechseln Sie mit [F1]{SET}[F2]{ADV} ins **Advanced Set-up**-Menü und nehmen Sie folgende Einstellungen vor (vgl. Abschnitt 2.3):



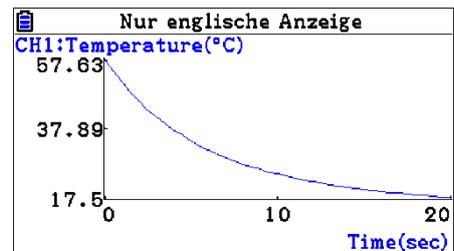
Die aktuelle Wassertemperatur beträgt 67,6°C. Da die Messung über einen Trigger gestartet werden soll, muss die Triggerschwelle einige Grad unter dieser Temperatur liegen. Hier sind es 60°C (vgl. Abschnitt 2.4).

## Messung

Starten Sie die Messung wie in Abschnitt 2.3 beschrieben. Bringen Sie den Temperatursensor vom heißen ins kalte Wasser. Warten Sie, bis die Messung nach 20 s beendet ist, und drücken Sie [EXE].

## Auswertung

Das Ergebnis könnte dann wie gezeigt aussehen. Übertragen Sie die Daten mit [OPTN][F2]{LMEM}[F1]{ALL} in die Listen 1 und 2. Bestimmen Sie anschließend noch im Multimeter-Modus des E-CON4 die Temperatur des kalten Wassers, da sie für die spätere Modellierung benötigt wird. In unserem Fall waren das 16.54°C.



Schalten Sie dann mit [MENU][2]{STAT} in den Listeneditor. Da wir später eine exponentielle Regression durchführen möchten, müssen die Temperaturwerte so korrigiert werden, dass die x-Achse die Asymptote ist. Es muss also jeweils die Zimmertemperatur subtrahiert werden.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	TIME	Temper		
1	0	58.225		
2	0.5	54.71		
3	1	51.41		
4	1.5	48.495		

List 2-16.54

Gehen Sie mit dem Cursor auf das Feld **List 3** und geben Sie ein:

[SHIFT][1]{List}[2][-] 16.54 [EXE]

In der dritten Spalte erscheinen dann die korrigierten Werte.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	TIME	Temper		
1	0	58.225	41.685	
2	0.5	54.71	38.17	
3	1	51.41	34.87	
4	1.5	48.495	31.955	

41.685

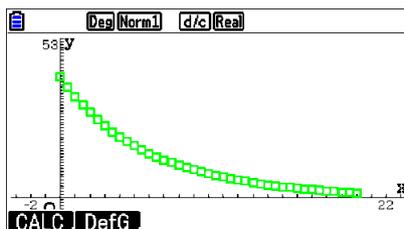
Erstellen Sie nun einen Scatter-Plot und führen Sie eine exponentielle Regression durch mit

[F1]{CALC} [F6]{>} [F3]{EXP} [F1]{ae<sup>bx</sup>}

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	TIME	Temper		
1	0	58.225	41.685	
2	0.5	54.71	38.17	
3	1	51.41	34.87	
4	1.5	48.495	31.955	

41.685

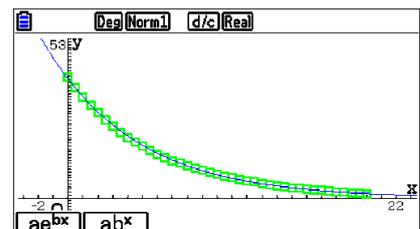
StatGraph1  
Graph Type : Scatter  
XList : List1  
YList : List3  
Frequency : 1  
Mark Type :   
Color Link : Off



	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	TIME	Temper		
1	0	58.225	41.685	
2	0.5	54.71	38.17	
3	1	51.41	34.87	
4	1.5	48.495	31.955	

Exp. Regl. (a · e<sup>bx</sup>)  
a = 41.2515467  
b = -0.1635281  
r = -0.9994848  
r<sup>2</sup> = 0.99897004  
MSe = 1.0144 × 10<sup>-3</sup>  
y = a · e<sup>bx</sup>

COPY DRAW



Das Ergebnis sieht gut aus.

## Interpretation

Vereinfacht können wir annehmen, dass die vom Temperatur-Sensor aufgenommene „Wärme“<sup>4</sup> in das kalte Wasser abfließt. Die Temperaturdifferenz dient hierbei als „Pumpe“. Je größer die Temperaturdifferenz, desto schneller die Abkühlung. Bezeichnen wir die Temperatur des Sensors als zeitabhängige Funktion  $\vartheta(t)$ , dann ist die Abkühlungsgeschwindigkeit durch die Ableitung  $\vartheta'(t)$  gegeben. Der einfachste Ansatz ist ein proportionaler Zusammenhang zwischen Abkühlungsgeschwindigkeit und Temperaturdifferenz, was auf folgende Differenzialgleichung führt:

$$\vartheta'(t) = -k \cdot (\vartheta(t) - \vartheta_0) \quad ; \quad k > 0 \quad (*)$$

wobei  $\vartheta_0$  die Temperatur des kalten Wassers bezeichnet, die wir in diesem Modell als konstant ansehen. Da sich das Wasser tatsächlich aber minimal erwärmt, entsteht ein (kleiner) Fehler. Aber ohne diese Annahme können wir die Differenzialgleichung nicht lösen. Das negative Vorzeichen begründet sich durch die Abnahme der Temperatur.

Der Graph der Messreihe legt die Vermutung nahe, dass  $\vartheta$  die Form  $\vartheta(t) = a \cdot e^{bt} + c$  hat.

Setzt man diesen Ansatz in die Gleichung (\*) ein, so ergibt sich:

$$b \cdot a \cdot e^{bt} = -k \cdot (a \cdot e^{bt} + c - \vartheta_0) \Leftrightarrow b \cdot a \cdot e^{bt} = -k \cdot a \cdot e^{bt} - k \cdot (c - \vartheta_0)$$

Diese Gleichung wird genau dann für beliebige  $t$  erfüllt, wenn  $b = -k$  und  $c = \vartheta_0$ .

Die Lösung lautet also  $\vartheta(t) = \vartheta_A \cdot e^{-kt} + \vartheta_0$  ( $\vartheta_A$ : Anfangstemperatur;  $k > 0$ )

## Variante

Sie können auch den umgekehrten Prozess untersuchen, wenn Sie den Temperatursensor vom kalten ins heiße Wasser stellen.

---

<sup>4</sup> Der physikalisch korrekte Begriff lautet „Entropie“.

## 3.6 Ein Loch in der Flasche

### Worum es geht

Eine im mittleren Bereich zylindrische mit Wasser gefüllte Flasche hat unten ein Loch. Öffnet man das Loch, so läuft das Wasser heraus und der Wasserspiegel sinkt. Untersucht wird die Höhe des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit.

Von den Messwerten wird nur ein Teil zur Entwicklung eines Modells verwendet. Die übrigen Messwerte dienen der Überprüfung.

### Unterrichtseinsatz

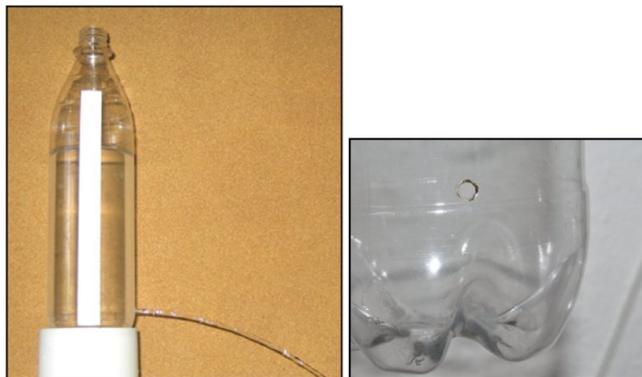
**Physik:** hydrostatischer Druck, beschleunigte Bewegung

**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, lineare, quadratische und Exponentialfunktionen, Differenzialgleichungen

Dieses Experiment eignet sich besonders zum Einstieg in die Analysis, um gängige Funktionstypen (linear, quadratisch, exponentiell) zu wiederholen. Es sollte zuerst eine Interpolation (mit 2-3 geeigneten Messwerten) per Hand durchgeführt werden. Dabei kommen auch lineare Gleichungssysteme zum Einsatz. Die Resultate können später mit der Regression verglichen werden.

### Material

- PET-Flasche, möglichst zylindrisch
- Metronom (Taktgeber)



### Vorbereitung

Brennen Sie mit einem heißen Nagel am unteren Ende des zylindrischen Bereichs ein Loch in die Flasche (Durchmesser ca. 3-4 mm). Kleben Sie einen Papierstreifen auf die Flasche und markieren Sie die Oberkante des Lochs.

## Messung

Füllen Sie die Flasche mit Wasser, so dass der Wasserspiegel noch im zylindrischen Bereich liegt. Lassen Sie das Wasser auslaufen und bestimmen Sie die Zeit, bis der Wasserspiegel das Loch erreicht hat. Die Messintervalle sollten so festgelegt werden, dass Sie etwa 10-12 Messwerte aufnehmen können. Im beschriebenen Beispiel waren dies 5 Sekunden. Stellen Sie das Metronom auf 60 Schläge pro Minute und starten Sie es. Lassen Sie nun das Wasser auslaufen und markieren Sie bei jedem 5. Schlag die Höhe des Wasserspiegels auf dem Papierstreifen. Diese Methode ist wesentlich bequemer (und genauer), als ständig zwischen einer Uhr und dem Papierstreifen hin- und herzuschauen.

## Auswertung

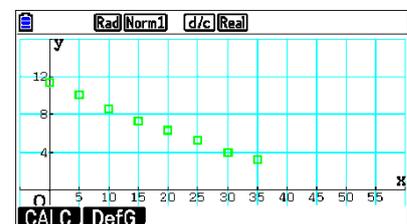
Folgende Werte wurden gemessen:

	zur Entwicklung eines Modells								zur späteren Überprüfung			
<b>Zeit (s)</b>	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
<b>Höhe (cm)</b>	11,4	10,1	8,6	7,3	6,3	5,2	4,0	3,2	2,5	1,8	0,9	0,6

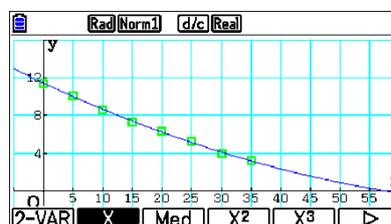
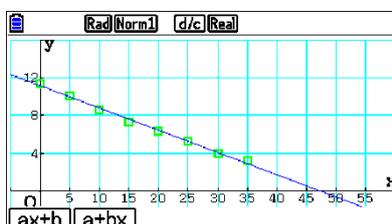
Öffnen Sie mit [MENU][2]{STAT} den Listeneditor und übertragen Sie die ersten 8 Messwerte in die Listen 1 und 2. Erstellen Sie anschließend einen Scatterplot.

Sub	List 1 T(S)	List 2 H(CM)	List 3	List 4
1	0	11.4		
2	5	10.1		
3	10	8.6		
4	15	7.3		

**Betrachtungsfenster**  
 Xmin : -5  
 max : 60  
 scale : 5  
 dot : 0.17195767  
 Ymin : -4  
 max : 16



Auch wenn der Plot einen linearen Zusammenhang vermuten lässt, testen wir drei Regressionsfunktionen.



Alle Modelle sind einigermaßen akzeptabel. Allerdings sieht man beim linearen Modell deutlich eine Linkskrümmung im Punkteverlauf. Das quadratische Modell passt sich da etwas besser an als das exponentielle. Zur Überprüfung tragen Sie nun die übrigen Messwerte in die Listen 3 und 4 und erstellen Sie einen Scatterplot auf GPH2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	T(S)	H(CM)	T2(S)	H2(CM)
1	0	11.4	40	2.5
2	5	10.1	45	1.8
3	10	8.8	50	0.9
4	15	7.3	55	0.6
			40	

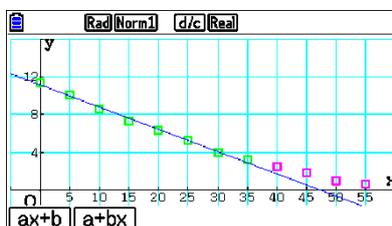
```

StatGraph2
Graph Type : Scatter
XList      : List3
YList      : List4
Frequency   : 1
Mark Type   : 
Color Link  : Off
  
```

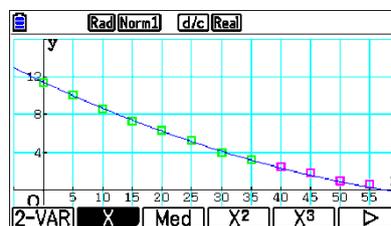
```

StatGraph1 : DrawOn
StatGraph2 : DrawOn
StatGraph3 : DrawOff
  
```

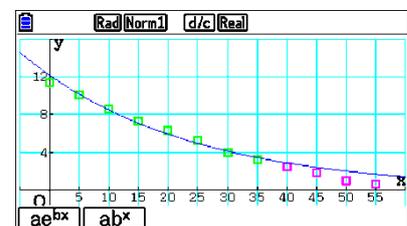
Um beide Plots gleichzeitig sehen zu können, müssen Sie im Listeneditor [F4]{SEL} drücken, die beiden Graphen einschalten (DrawOn) und mit [F6]{DRAW} zeichnen. Erstellen Sie auch hier wieder die entsprechenden Regressionsmodelle. Nachdem Sie das Modell ausgewählt haben, müssen Sie entscheiden, ob die Daten aus StatGraph1 oder StatGraph2 verwendet werden sollen (Cursor-Hoch/Runter umschaltbar). Wir verwenden jeweils StatGraph1.



lineares Modell

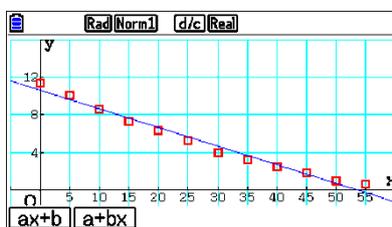


quadratisches Modell

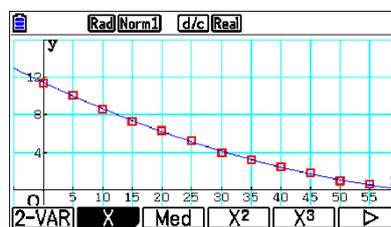


exponentielles Modell

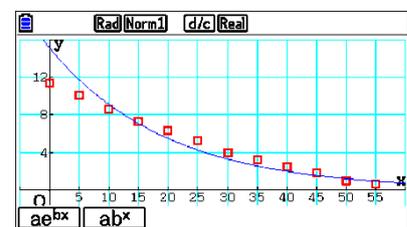
Hier liefert eindeutig das quadratische Modell die beste Prognose. Abschließend führen wir eine Regression über alle 12 Messwerte durch. Dazu müssen diese in die Listen 5 und 6 geschrieben werden.



lineares Modell



quadratisches Modell



exponentielles Modell

Hier erkennt man sehr deutlich die Güte des quadratischen Modells. Erstaunlicherweise passt das exponentielle Modell am schlechtesten.

## Interpretation

### a) Vergleich der mathematischen Modelle

Das Experiment liefert unmittelbar zwei Erkenntnisse:

- (I) Wegen des abnehmenden Drucks strömt immer weniger Wasser pro Zeit aus, d.h., die Ausströmgeschwindigkeit nimmt ab. (Der Graph wird flacher.)

- (II) Nach einer gewissen Zeit läuft kein Wasser mehr aus. (Der Graph hat eine Nullstelle.)

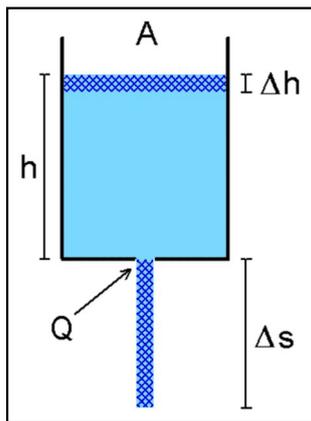
Lineares Modell: Hier ist (II) erfüllt, (I) allerdings nicht. Da die Ausströmgeschwindigkeit in diesem Modell als konstant angenommen wird, wäre die Flasche in diesem Modell zu schnell leer. Dies ist auch im Graphen zu erkennen.

Exponentielles Modell: Hier ist umgekehrt (I) erfüllt, (II) allerdings nicht. Bei der Prognose liefert dieses Modell deshalb zu große Werte für die Höhe.

Quadratisches Modell: Dieses Modell erfüllt beide Bedingungen und bietet auch eine recht zuverlässige Prognose. Es kann also als brauchbar akzeptiert werden.

### b) Ein physikalisches Modell

Wir betrachten einen Zylinder mit einem Loch am Boden.



A: Querschnittsfläche der Flasche

Q: Querschnittsfläche des Lochs

h: Höhe des Wasserspiegels über dem Loch

Ist Q klein im Vergleich zu A, kann man die Sinkgeschwindigkeit der Wasseroberfläche vernachlässigen.

Die potenzielle (Lage-) Energie der oberen Schicht wird in kinetische Energie des ausströmenden Wassers umgewandelt. Für ein Wasserteilchen der Masse m gilt somit:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g \cdot h} \quad (g: \text{Ortsfaktor})$$

Im Zeitintervall  $\Delta t$  sinkt der Wasserspiegel um  $\Delta h$  und es strömt eine Wassersäule der Länge  $\Delta s$  aus. Aus der Konstanz des Volumens folgt

$$A \cdot \Delta h = Q \cdot \Delta s \Rightarrow A \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t} = Q \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  wird daraus  $A \cdot \frac{dh}{dt} = Q \cdot \frac{ds}{dt} \Rightarrow A \cdot h' = Q \cdot s' = Q \cdot v = Q \cdot \sqrt{2g \cdot h}$

Bisher wurden Beträge betrachtet. Man muss aber beachten, dass  $\Delta h$  und  $\Delta s$  unterschiedliche Vorzeichen haben ( $h$  nimmt ab,  $s$  nimmt zu). Deshalb ergibt sich unter

Berücksichtigung des Vorzeichens die Differenzialgleichung  $h' = -\frac{Q}{A} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}$

Gesucht ist also eine Funktion, bei der die Ableitung proportional zur Wurzel aus der Funktion ist. Das lässt wegen  $(x^2)' = 2x = 2\sqrt{x^2}$  für  $x > 0$  eine quadratische Funktion vermuten, was sich mit den Ergebnissen des Experiments deckt. Da die dort ermittelte Parabel nach rechts verschoben ist und der Scheitelpunkt auf der Zeitachse (bei  $t_0$ ) liegen müsste, versuchen wir den Ansatz

$$h(t) = k \cdot (t - t_0)^2 \quad (t < t_0)$$

$$h'(t) = 2k \cdot (t - t_0)$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert:

$$2k \cdot (t - t_0) = -\frac{Q}{A} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{k \cdot (t - t_0)^2} = -\frac{Q}{A} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{k} \cdot |t - t_0|$$

wegen  $t < t_0$  folgt

$$2k \cdot (t - t_0) = -\frac{Q}{A} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{k} \cdot (t_0 - t)$$

und

$$\sqrt{k} = \frac{Q}{A} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} \Rightarrow k = \left(\frac{Q}{A}\right)^2 \cdot \frac{g}{2}$$

Damit erhalten wir die gesuchte Funktion  $h(t) = \left(\frac{Q}{A}\right)^2 \cdot \frac{g}{2} (t - t_0)^2$

### Modellkritik:

Vergrößert man die Querschnittsfläche des Lochs, so gilt im Extremfall  $Q=A$ . Hier hätte das Gefäß keinen Boden und das Wasser müsste nach dem Gesetz des freien Falls auslaufen bzw. „herabfallen“:

$$h^*(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Der Graph dieser Funktion ist zwar ebenfalls eine Parabel, aber während sich das oben beschriebene Experiment im linken Ast einer nach oben geöffneten Parabel abspielt, verläuft der freie Fall im rechten Ast einer nach unten geöffneten Parabel. Die Ursache liegt in der Vernachlässigung der Abwärtsbewegung des Wassers in der Flasche. Beim Energieansatz wurde die potenzielle Energie vollständig in kinetische Energie des ausströmenden Wassers umgewandelt. Ein Teil geht aber auch in die kinetische Energie des Wassers in der Flasche. Dieser Effekt ist jedoch umso geringer, je kleiner der Lochquerschnitt im Vergleich zum Zylinderquerschnitt ist.

## Aufgabe

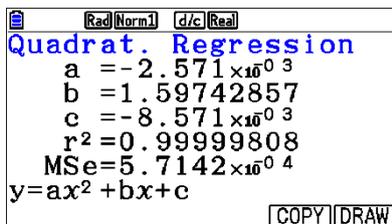
Ein in die Erde eingelassener zylindrischer Regenwasser-Tank hat ein Leck. Die Beobachtung des absinkenden Flüssigkeitsspiegels ergibt folgende Messwerte:

Zeit (min)	0	5	10	15	20
Absenkung (cm)	0	7,9	15,7	23,4	30,9

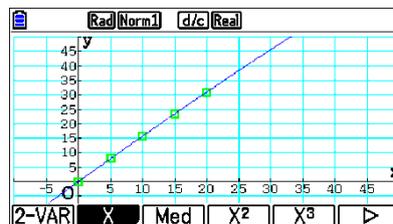
In welcher Tiefe befindet sich vermutlich das Leck?

### Lösung:

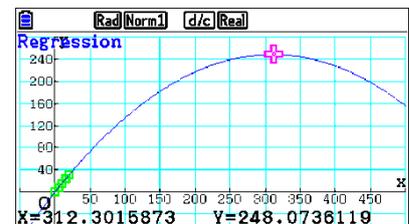
Legt man das quadratische Modell zugrunde, dann kann man eine Regressionsparabel ermitteln und deren Scheitelpunkt berechnen oder im Trace-Modus bestimmen.



quadratische Regression



Scatterplot mit Parabel  
 V-WINDOW  
 x: -10; 50; 5  
 y: -15; 50; 5

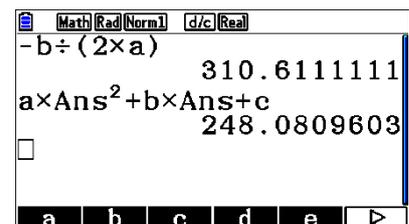


Scheitelpunkt im Trace-Modus suchen  
 V-WINDOW  
 x: -50; 500; 50  
 y: -60; 280; 40

Berechnung des Scheitelpunktes:

Die Werte der Parameter erhält man über

[VARS] [F3]{STAT} [F3]{GRAPH}



Das bedeutet, das Leck befindet sich etwa 2,48m unter dem Anfangspegel und nach ca. 311min hat der Wasserspiegel das Leck erreicht.

## 3.7 Schwerpunkt einer Cola-Dose

### Worum es geht

Bei einer vollen Cola-Dose befindet sich der Schwerpunkt auf halber Höhe der Dose. Wie verändert sich die Höhe des Schwerpunktes, wenn man die (aufrecht stehende) Dose langsam mit einem Strohhalm austrinkt? Genauer: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Höhe des Flüssigkeitsspiegels und der Höhe des Schwerpunktes?

Da der Schwerpunkt der Dose experimentell schwer zu bestimmen ist, wird die Dose durch ein Lineal und die Flüssigkeit durch Würfel auf dem Lineal simuliert. Schiebt man das Lineal langsam über die Tischkante, beginnt es zu kippen, wenn sich der Schwerpunkt auf der Tischkante befindet.

### Unterrichtseinsatz

**Physik:** Hebelgesetze, Schwerpunkt, Dreh- und Trägheitsmoment

**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, gewichteter Mittelwert

### Material

- ein Lineal
- ca. 20 Würfel, um das Lineal damit zu belegen (man kann auch Münzen verwenden)



### Vorbereitung

Legen Sie das Lineal senkrecht zur Tischkante vor sich, so dass es ungefähr mit der Tischkante abschließt. Belegen Sie das Lineal möglichst vollständig mit Würfeln. Wichtig ist, dass der vordere Würfel genau mit der Kante des Lineals abschließt.

## Messung

Schieben Sie das Lineal langsam über die Tischkante, bis es anfängt zu kippen. Halten Sie dabei eine Hand unter das Lineal, damit es nicht so weit kippt, dass die Würfel herunterfallen. Wenn es gerade anfängt zu kippen, liegt der Schwerpunkt auf der Tischkante. Messen Sie dessen Abstand zur vorderen Kante des Lineals. Sie können einfach die Länge auf dem Lineal ablesen und müssen nur noch den Abstand zwischen der Null und der Kante addieren. Schieben Sie das Lineal zurück, nehmen Sie den hintersten Würfel weg und messen Sie erneut den Schwerpunktabstand. Wiederholen Sie das so lange, bis kein Würfel mehr vorhanden ist. Notieren Sie dabei jeweils Anzahl der Würfel und Schwerpunktabstand. Die Höhe des Flüssigkeitsspiegels in der Dose entspricht im Experiment der Länge der Würfelreihe und der Schwerpunktabstand der Höhe des Schwerpunktes. Bestimmen Sie die Länge eines Würfels (am besten mit 10 Würfeln) und tragen Sie die Anzahl der Würfel und die Schwerpunktabstände in eine Tabelle ein.

## Auswertung

Anzahl Würfel	0	1	2	3	4	5	6	7
Schwerpunktabst. (cm)	12,35	10,6	9,55	8,9	8,5	8,3	8,45	8,65
Anzahl Würfel	8	9	10	11	12	13	14	
Schwerpunktabst. (cm)	8,9	9,3	9,7	10,1	10,6	10,95	11,65	

Die Kantenlänge eines Würfels beträgt 1,52cm.

Öffnen Sie mit [MENU][2]{STAT} den Listeneditor und übertragen Sie die Messwerte in die Listen 1 und 2.

Um die Länge der Würfelreihe in Liste 3 zu berechnen, gehen Sie mit dem Cursor auf **List 3** und geben Sie ein:

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	WFL	S ABST	W-LAEN	
1	0	12.35	0	
2	1	10.6		
3	2	9.55		
4	3	8.9		

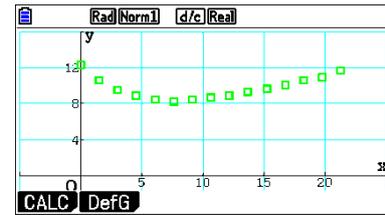
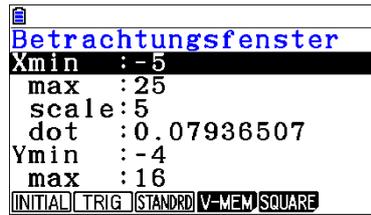
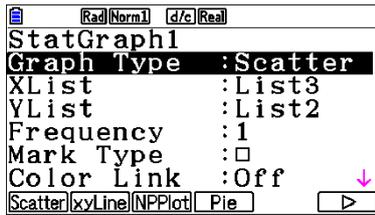
List 1 × 1.52

[SHIFT][1]{List}[1]\*1.52 [EXE].

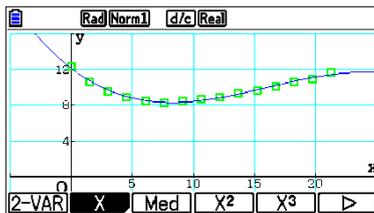
Dann werden die Werte in Liste 3 eingetragen. Erzeugen Sie nun einen Scatterplot.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	WFL	S ABST	W-LAEN	
1	0	12.35	0	
2	1	10.6	1.52	
3	2	9.55	3.04	
4	3	8.9	4.56	

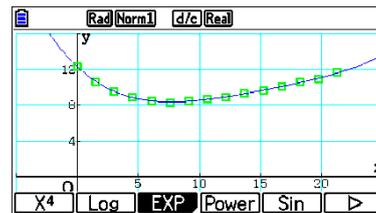
0



Gesucht ist nun eine Funktion  $s(x)$ , die die Höhe des Schwerpunktes in Abhängigkeit von der Höhe der Flüssigkeit beschreibt. Man kann verschiedene Regressionen durchführen.



Polynom Grad 3



Polynom Grad 4

Die zweite Regression passt recht gut. So richtig befriedigend ist das jedoch nicht, da eine Begründung fehlt.

Wir versuchen einen physikalischen Zugang:

Die Würfelreihe und das Lineal stellen zwei unterschiedliche Körper dar, deren Schwerpunkt aus Symmetriegründen jeweils in der Mitte liegt.

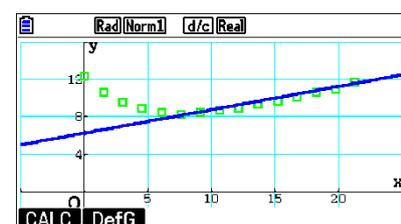
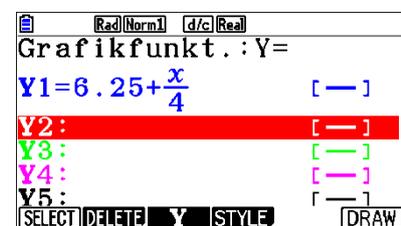
### Erste Hypothese

Der Abstand des gemeinsamen Schwerpunktes ist der Mittelwert der beiden Schwerpunktabstände. Das verwendete Lineal hatte eine Länge von 25cm, also einen Schwerpunktabstand von 12,5cm. Der Schwerpunktabstand der Würfelreihe beträgt  $x/2$ . Damit ergibt sich für die gesuchte Funktion  $s_1$

$$s_1(x) = \frac{12,5 + \frac{x}{2}}{2} = 6,25 + \frac{x}{4}$$

Um das Ergebnis zu überprüfen, soll der Graph von  $s_1$  in den Scatterplot gezeichnet werden. Dazu wählen Sie im Graph-Bildschirm [F2]{DefG}, um in den Funktionen-Bildschirm zu kommen. Dort geben Sie den Funktionsterm ein. Achten Sie darauf, dass die Funktion ausgewählt ist (zu erkennen am unterlegten Gleichheitszeichen) bzw. wählen Sie Y1 mit [F1]{SEL} aus. Mit [F6]{DRAW} zeichnen Sie den Graphen.

Das Ergebnis passt zwar im rechten Bereich ganz gut, im linken aber überhaupt nicht.



Damit war eigentlich zu rechnen, da  $s_1$  als lineare Funktion kein gutes Modell sein konnte. Außerdem sollte die bei gleicher Länge schwerere Würfelreihe einen stärkeren Beitrag zum gemeinsamen Schwerpunktabstand liefern als das leichtere Lineal.

## Zweite Hypothese

Der Abstand des gemeinsamen Schwerpunktes ist der mit den Massen gewichtete Mittelwert der beiden Schwerpunktabstände. Das verwendete Lineal hatte eine Masse von 27,6g und ein Würfel die Masse 4,7g.

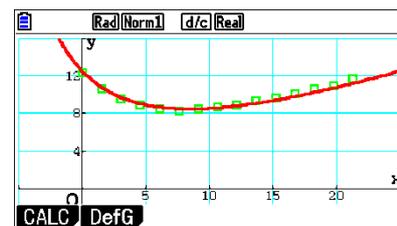
Der Schwerpunktabstand beim Lineal beträgt 12,5 cm und bei den Würfeln  $x/2$ .

Die Masse der Würfelreihe beträgt  $\frac{x}{1,52} \cdot 4,7\text{g}$ , wobei  $\frac{x}{1,52}$  die Anzahl der Würfel ist.

Damit ergibt sich für die gesuchte Funktion  $s_2$

$$s_2(x) = \frac{12,5 \cdot 27,6 + \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{1,52} \cdot 4,7}{27,6 + \frac{x}{1,52} \cdot 4,7}$$

Die Überprüfung des Graphen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Auch wenn die Funktion  $s_2$  auf den ersten Blick kaum besser erscheint, als das Regressionspolynom  $s_1$ , haben in diesem Fall physikalische Überlegungen zu dem Ergebnis geführt.



Das physikalisch motivierte Modell des gewichteten Mittelwertes hat uns zu einem passenden mathematischen Modell geführt.

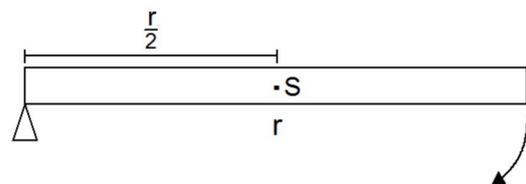
## Interpretation

Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn sich die Drehmomente links und rechts vom Auflagepunkt aufheben. Das ist genau dann der Fall, wenn der Auflagepunkt im Schwerpunkt bzw. darunter liegt.

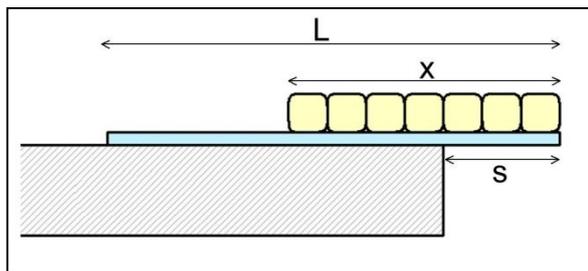
Legt man einen Hebel der Länge  $r$  an einem Ende auf, dann bewirkt das Drehmoment  $D$ , dass er seitlich abkippt.

Dabei gilt  $D = \frac{r}{2} \cdot m \cdot g$ , wobei sich die

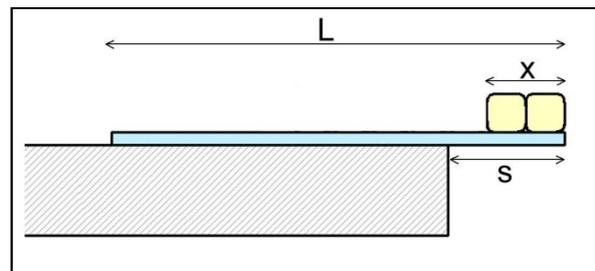
Gewichtskraft  $m \cdot g$  als Produkt aus der Masse  $m$  des Hebels und dem Ortsfaktor  $g$  ergibt.



Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:



Die Tischkante liegt unterhalb der Würfel



Die Tischkante liegt außerhalb der Würfel

$L$  : Länge des Lineals       $d$  : Länge der Würfelreihe       $s$  : Schwerpunktabstand  
 $M$  : Masse des Lineals       $m$  : Masse der Würfelreihe

Im ersten Fall gilt folgender Ansatz für die Drehmomente im Gleichgewicht

Masse des Lineals links von der Tischkante:  $\frac{L-s}{L} \cdot M$

Masse des Lineals rechts von der Tischkante:  $\frac{s}{L} \cdot M$

Masse der Würfel links von der Tischkante:  $\frac{x-s}{x} \cdot m$

Masse der Würfel rechts von der Tischkante:  $\frac{s}{x} \cdot m$

$$D_{\text{links}} = D_{\text{rechts}}$$

$$\frac{L-s}{2} \cdot \frac{L-s}{L} \cdot M \cdot g + \frac{x-s}{2} \cdot \frac{x-s}{x} \cdot m \cdot g = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{L} \cdot M \cdot g + \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{x} \cdot m \cdot g$$

$$\frac{(L-s)^2}{L} \cdot M + \frac{(x-s)^2}{x} \cdot m = \frac{s^2}{L} \cdot M + \frac{s^2}{x} \cdot m$$

$$\frac{L^2 - 2Ls + s^2}{L} \cdot M + \frac{x^2 - 2xs + s^2}{x} \cdot m = \frac{s^2}{L} \cdot M + \frac{s^2}{x} \cdot m$$

$$\frac{L^2 - 2Ls}{L} \cdot M + \frac{x^2 - 2xs}{x} \cdot m = 0$$

$$(L - 2s) \cdot M + (x - 2s) \cdot m = 0$$

$$L \cdot M + x \cdot m = 2s \cdot (M + m)$$

$$s = \frac{\frac{L}{2} \cdot M + \frac{x}{2} \cdot m}{M + m}$$

Der zweite Fall wird analog gerechnet und führt zum gleichen Ergebnis.

Damit wird die Hypothese des gewichteten Mittelwertes auch physikalisch begründet.

## 3.8 Luftballons aufblasen

### Worum es geht

Ein Luftballon wird nach und nach durch möglichst gleichmäßige Atemstöße aufgeblasen. Es soll der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Atemstöße und dem Umfang des Luftballons untersucht werden.

### Unterrichtseinsatz

**Physik:** ---

**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, Kugelvolumen, Potenzfunktionen

### Material

- ein Luftballon
- ein Maßband  
oder eine Schnur und ein Zollstock



### Messung

Blasen Sie den Ballon nach und nach auf und messen Sie nach jedem Atemstoß den Umfang des Ballons. Tragen Sie die Messwerte in eine Tabelle ein.

### Auswertung

Eine Messung ergab folgende Ergebnisse:

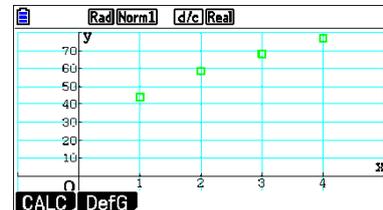
Atemstöße	1	2	3	4
Umfang (cm)	44,2	58,5	68,1	76,8

Öffnen Sie mit [MENU][2]{STAT} den Listeneditor und übertragen Sie die Messwerte in die Listen 1 und 2. Erstellen Sie anschließend einen Scatterplot. Erzeugen Sie

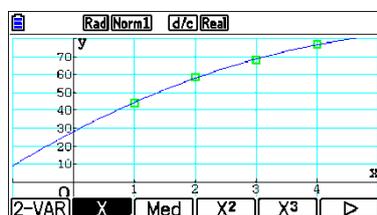
nun einen Graphen, bei dem der Umfang über der Anzahl der Atemstöße aufgetragen ist. Finden Sie mit Hilfe des Regressionsmoduls (CALC) eine passende Funktion und begründen Sie diese.

List 1		List 2	List 3	List 4
SUB	N	U		
1	1	44.2		
2	2	58.5		
3	3	68.1		
4	4	76.8		

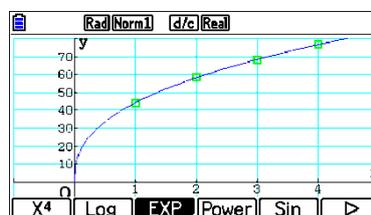
Betrachtungsfenster  
 Xmin : -1  
 max : 5  
 scale : 1  
 dot : 0.01587301  
 Ymin : -20  
 max : 80



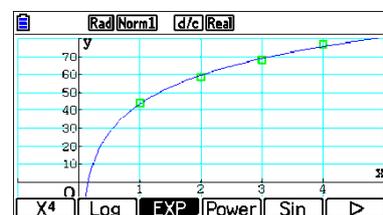
Man kann nun verschiedene Regressionen durchführen:



quadratische Funktion



Potenzfunktion (Power)



Logarithmusfunktion

## Interpretation

Alle drei Regressionen liefern in Bezug auf die Punkte annehmbare Ergebnisse. Wenn man voraussetzt, dass bei 0 Atemstößen kein Volumen vorhanden und der Umfang also auch 0 ist, muss der Punkt (0|0) enthalten sein. Dies trifft nur bei der Potenzfunktion zu.

Schauen wir uns die Ergebnisse dieser Regression genauer an, dann ergibt sich die Regressionsfunktion (Werte gerundet):

$$U(x) = 44,25 \cdot x^{0,40} \quad x: \text{Anzahl der Atemstöße}$$

Regression-Potenzfkt.  
 a = 44.2515579  
 b = 0.39658581  
 r = 0.99987412  
 r<sup>2</sup> = 0.99974827  
 MSe = 2.1468 × 10<sup>-5</sup>  
 y = a · x<sup>b</sup>

Wir machen folgende Modellannahmen:

- (1) Der Ballon hat die Form einer Kugel.
- (2) Pro Atemstoß nimmt das Volumen um A zu.

$$\text{Dann gilt: } V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = A \cdot x \quad \text{und} \quad U = 2\pi \cdot r \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{U}{2\pi}$$

$$\text{daraus folgt } \frac{4}{3} \pi \cdot \left( \frac{U}{2\pi} \right)^3 = A \cdot x \quad \text{und schließlich } U(x) = \sqrt[3]{6A \cdot \pi^2 \cdot x^3}$$

Der im Experiment ermittelte Exponent ist etwas größer als  $\frac{1}{3}$ . Dies lässt sich vermutlich auf die Vereinfachungen bei den Modellannahmen zurückführen.

Für das Volumen pro Atemstoß folgt:

$$44,25 \text{ cm} = \sqrt[3]{6A \cdot \pi^2} \Rightarrow A = 1463 \text{ cm}^3 = 1,436 \text{ L}$$

Das ist ein plausibler Wert.

## 3.9 Federpendel

### Worum es geht

Die Schwingung eines Federpendels soll untersucht werden. Dazu wird die Bewegung eines Gewichtsstückes mit Hilfe des Ultraschall-Bewegungssensors aufgezeichnet und das Zeit-Weg-Diagramm analysiert.

### Unterrichtseinsatz

**Physik:** harmonische Schwingung

**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, trigonometrische Funktionen, Verschiebung von Funktionsgraphen

### Material

- Feder mit Gewicht (Billiard- oder Boulekuugel)
- Stativmaterial
- C-LAB
- Motion-Sensor (Ultraschall-Bewegungssensor)



### Vorbereitung

Verbinden Sie den fx-CG50 unter Verwendung des Dreipolkabels mit dem CASIO-GC-Eingang des C-LAB und belegen Sie Kanal 1 mit dem Motion-Sensor. Rufen Sie im Hauptmenü E-CON4 auf und wählen Sie bei den CMA-Sensoren den Motion-Sensor aus, falls er nicht automatisch erkannt wird.

Nehmen Sie dann folgende Einstellungen vor (vgl. Abschnitt 2.3) und stellen Sie den Trigger auf [E-XE]key.

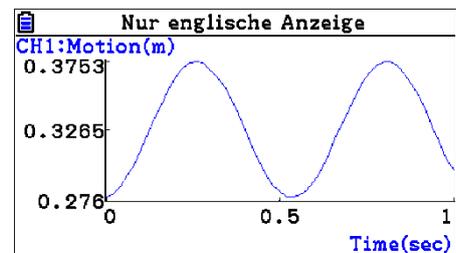


## Messung

Eine kugelförmige Masse ist zur Reflexion des Ultraschalls besser geeignet, da ein leichtes Verkanten kaum eine Rolle spielt. Heben Sie das Pendel etwas an und lassen Sie es schwingen. Starten Sie dann die Messung mit [EXE].

## Auswertung

Das Ergebnis könnte dann wie gezeigt aussehen. Übertragen Sie die Daten mit [OPTN][F2]{LMEM}[F1]{ALL} in die Listen 1 und 2.



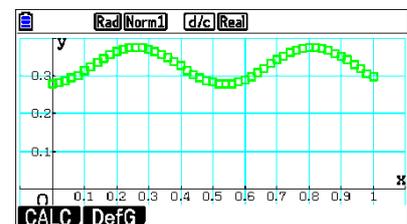
Schalten Sie dann mit [MENU][2]{STAT} in den Listeditor um und erstellen Sie einen Scatterplot.

Die unten gezeigten Werte müssen eventuell an die eigene Messung angepasst werden.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	TIME	Motion		
1	0	0.2786		
2	0.02	0.2814		
3	0.04	0.2859		
4	0.06	0.2945		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	TIME	Motion		
1	0	0.2786		
2	0.02	0.2814		
3	0.04	0.2859		
4	0.06	0.2945		

Betrachtungsfenster	
Xmin	:-0.1
max	:1.1
scale	:0.1
dot	:3.1746 × 10 <sup>-3</sup>
Ymin	:-0.1
max	:0.4

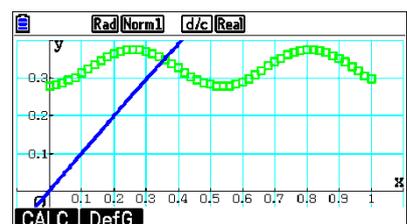


Es könnte sich um eine trigonometrische Funktion vom Typ  $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$  handeln.

Für die Physik wäre hier eine trigonometrische Regression ausreichend. Im Mathematikunterricht bietet sich aber nun die Gelegenheit, eine Sinusfunktion durch Berechnung der Parameter aus den Messwerten zu ermitteln.

Wenn man vorher die einfachen trigonometrischen Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  behandelt hat, ist die erste Schüleridee oft: „Es handelt sich um eine Sinusfunktion.“

Dies kann man überprüfen, indem man aus dem Graphenfenster heraus mit [F2]{DefG} ins Funktions-Menü umschaltet und dort die Funktion  $Y1 = \sin(x)$  eingibt. Mit [F6]{DRAW} kann man den Graphen zeichnen. Das Ergebnis ist nicht befriedigend.



Es bietet sich nun die Möglichkeit, über Modifikationen der sin-Funktion zu sprechen. Die Verschiebungen in x- und y-Richtung sowie die Streckung in y-Richtung sind vermutlich bereits von der Parabel bekannt. Hier kann experimentiert werden. Am Ende sollte folgendes Ergebnis stehen:

Allgemeine sin-Funktion:  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$

a: Amplitude (halbe Differenz der y-Werte von Hoch- und Tiefpunkt)

b: bestimmt die Frequenz (Kreisfrequenz); es gilt  $b = \frac{2\pi}{T}$ ; T: Periode

c: Verschiebung in x-Richtung

d: Verschiebung in y-Richtung

Mit [SHIFT][F1]{Trace} lassen sich die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt ablesen.

Bei dieser Messung ergab sich für den ersten Hochpunkt H(0,26|0,376) und für den folgenden Tiefpunkt T(0,54|0,279).

Damit lassen sich die Parameter berechnen.

$$a = \frac{y_H - y_T}{2} = \frac{0,376 - 0,279}{2} \approx 0,049$$

$$c = x_H - \frac{T}{4} = 0,26 - 0,14 = 0,12$$

$$T = 2 \cdot (0,54 - 0,26) = 0,56$$

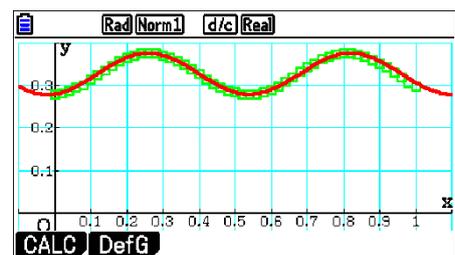
$$d = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{0,376 + 0,279}{2} \approx 0,328$$

$$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,56} \approx 11,22$$

Dies führt zur Funktion:

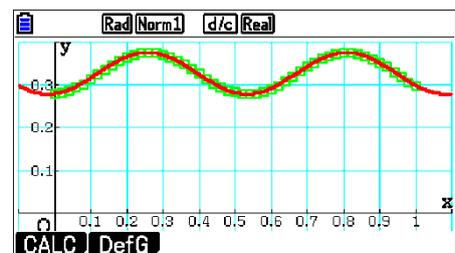
$$f(x) = 0,049 \cdot \sin(11,22(x - 0,12)) + 0,328$$

Legt man ihren Graphen über die Messwerte, dann ist die Übereinstimmung zunächst gut, wird nach der ersten Periode aber schlechter.



Offenbar ist der Wert von b zu ungenau. Eine Verbesserung kann man erreichen, wenn man nicht den ersten, sondern den zweiten Hochpunkt bei  $x = 0,81$  verwendet ( $x=0,8$  und  $x=0,82$  haben die gleichen y-Werte). Man erhält

$$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,81 - 0,26} \approx 11,42$$



$$f(x) = 0,049 \cdot \sin(11,42(x - 0,19)) + 0,328$$

$$= 0,049 \cdot \sin(11,42x - 1,37) + 0,328$$

Auch ein Vergleich mit der Regressionsfunktion zeigt gute Übereinstimmung.

```

Rad Norm1 d/c Real
Sin-Regression
a =0.04901518
b =11.4951557
c =-1.4425846
d =0.32703197
MSe=4.9797x10^7
y=a·sin(bx+c)+d
COPY DRAW

```

## Interpretation

Die Feder lässt sich durch einen linearen Zusammenhang zwischen Ausdehnung  $s$  und Rückstellkraft  $F$  modellieren (Hooke'sches Gesetz):

$$F = -D \cdot s \quad ; \quad D : \text{Federkonstante}$$

Mit den Bezeichnungen

$a$  : Beschleunigung in  $\text{m/s}^2$

$v$  : Geschwindigkeit in  $\text{m/s}$

$s$  : Weg in  $\text{m}$

$t$  : Zeit in  $\text{s}$

$m$  : Masse in  $\text{kg}$

und dem Gesetz  $F = m \cdot a$  ergibt sich in Funktionsschreibweise

$$F(t) = m \cdot a(t) = -D \cdot s(t)$$

Wegen  $a(t) = v'(t) = s''(t)$  erhält man die Differenzialgleichung

$$m \cdot s''(t) = -D \cdot s(t) \quad \Rightarrow \quad s''(t) = -\frac{D}{m} \cdot s(t)$$

Das Experiment legt als Ansatz für  $s(t)$  eine Sinusfunktion nahe. Startet man die Messung, wenn der Pendelkörper von unten durch die Gleichgewichtslage geht, dann reduziert sich die allgemeine Sinusfunktion zu folgendem Ansatz:

$$s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$$

Ableiten ergibt

$$s''(t) = -a \cdot b^2 \cdot \sin(b \cdot t) = -b^2 \cdot s(t)$$

Daraus ergibt sich mit  $b = \sqrt{\frac{D}{m}}$  als Lösung die Funktion

$$s(t) = s_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) = s_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$s_0$  : Amplitude;  $\omega$ : Kreisfrequenz

Für den Physiker bietet es sich nun noch an, die Werte  $m$  und  $D$  zu messen und die daraus berechnete Kreisfrequenz mit dem Experiment zu vergleichen.

## 3.10 Fadenpendel

### Worum es geht

Das C-LAB besitzt einen eingebauten Beschleunigungssensor, der in den drei Raumrichtungen x, y und z messen kann.

Das C-LAB wird entlang der x-Achse bifilar aufgehängt (s.u.) und bildet den Pendelkörper. In y-Richtung kann dann die Zentrifugalbeschleunigung gemessen werden. Da das C-LAB einen recht großen Luftwiderstand hat, sollte eine Dämpfung deutlich erkennbar sein.

Die Messwerte werden später auf einem PC übertragen und mit einer Tabellenkalkulation ausgewertet.



### Unterrichtseinsatz

**Physik:** Gedämpfte Schwingungen

**Mathematik:** funktionale Abhängigkeiten, Modellieren mit Funktionen, trigonometrische Funktionen, Anpassen von Funktionsgraphen

### Material

- C-LAB
- Stativmaterial
- Ein dünnes Röhrchen, das mit Klebeband auf dem C-LAB befestigt wird und durch das der Faden geführt werden kann.



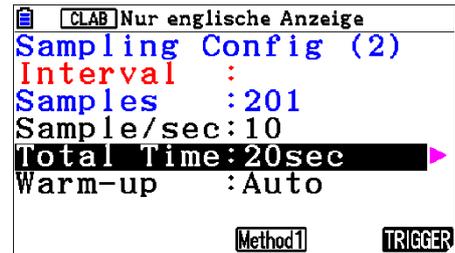
### Vorbereitung

Hängen Sie das C-LAB wie im Bild bifilar auf.

Zunächst muss das C-LAB programmiert werden. Wählen Sie dazu bei den Sensoren die CMA-Sensoren und dort CLAB Accel Y. Verwenden Sie den Messbereich  $\pm 20\text{m/s}^2$ .

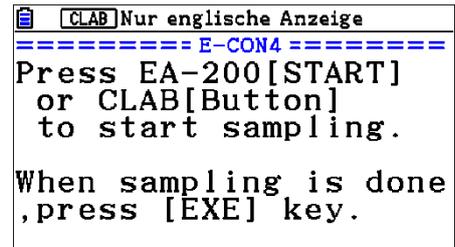


Stellen Sie mit Methode 2 die Rate auf 10 Werte pro Sekunde und die Messdauer auf 20 Sekunden ein. Wählen Sie als Trigger den Start-Button des C-LAB

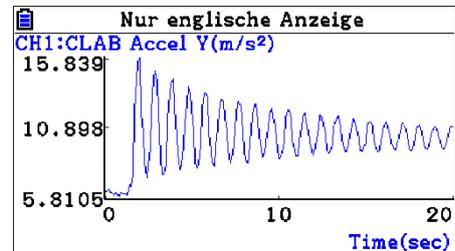


## Messung

Wenn Sie die Messung starten, erscheint der gezeigte Bildschirm. Lösen sie jetzt das Dreipolkabel vom C-LAB, lenken Sie es aus, drücken Sie den Start-Button und lassen sie es los.



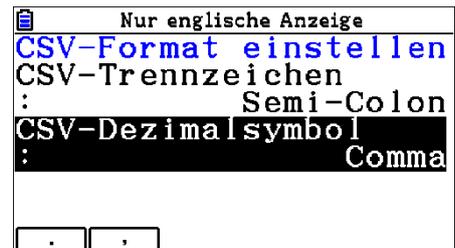
Wenn die Messung beendet ist, verbinden Sie das C-LAB wieder mit dem Dreipolkabel und drücken Sie [EXE]. Das Bild zeigt ein mögliches Ergebnis. Der erste Teil des Graphen zeigt den Startvorgang, den wir für eine Auswertung noch abschneiden müssen.



## Auswertung

Die Daten sollen zunächst auf einen PC übertragen und dort weiter ausgewertet werden.

Drücken Sie [OPTN][MEMORY][CSV][SET] und stellen Sie als Trennzeichen das Semikolon und als Dezimalsymbol das Komma ein. Drücken Sie [EXE] und dann [SAVE-AS]. Wählen Sie dann [ALL] und speichern Sie die Daten, z.B. unter dem Namen FEDER.



Verbinden Sie den fx-CG50 und Computer mit einem USB-Kabel und wählen Sie auf dem GTR [F1]{Massenspeicher}. Im Windows-Explorer finden Sie den GTR als externes Laufwerk. Dort sollten Sie die gespeicherte csv-Datei finden. Kopieren Sie die Datei auf den PC und öffnen Sie diese mit einer Tabellenkalkulation. Die folgenden Beschreibungen beziehen sich auf Excel 2007.

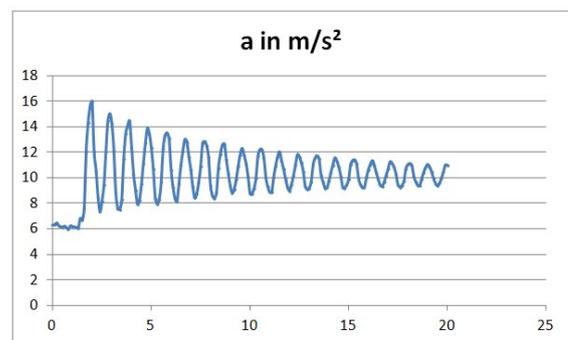
Das Ergebnis könnte so aussehen. Es sind nur die y-Werte übertragen worden. Da wir als Messrate 10 Messungen pro Sekunde eingestellt hatten, beginnen unsere x-Werte bei 0 und erhöhen sich jeweils um 0,1. Fügen Sie links eine neue Spalte ein und füllen Sie diese entsprechend. Auch die Überschriften sollte man anpassen.

	A	B
1	Gph1	
2	6,32813	
3	6,32813	
4	6,48438	
5	6,26953	
6	6,19141	
7	6,12305	

Dann sieht das etwa so aus.

	A	B
1	<b>t in s</b>	<b>a in m/s<sup>2</sup></b>
2	0	6,32813
3	0,1	6,32813

Markieren Sie nun die Spalten und erzeugen Sie einen Punkteplot mit interpolierenden Linien. Die Punkte selbst machen Sie am besten so klein wie möglich. (rechte Maustaste → Datenreihen formatieren → Markierungsoptionen → Integriert → Größe 2).



Um die Dämpfung zu untersuchen, schneiden wir zunächst den Startvorgang bis zum ersten Maximum ab, indem wir die Zeilen einfach löschen.

	A	B	C
1	<b>t in s</b>	<b>a in m/s<sup>2</sup></b>	
2	2	15,9668	
3	2,1	12,0508	
4	2,2	10,5566	

Nun sollen alle Maxima herausgefiltert werden. Dazu erzeugen wir in der dritten Spalte den Wert 1, wenn es ein Maximum ist, sonst den Wert 0. Da der erste Wert ein Maximum ist, kommt in das Feld C2 eine 1. Die Felder darunter füllen wir mit der Formel

$$=WENN(UND(B3>B2;B3>B4);1;0)$$

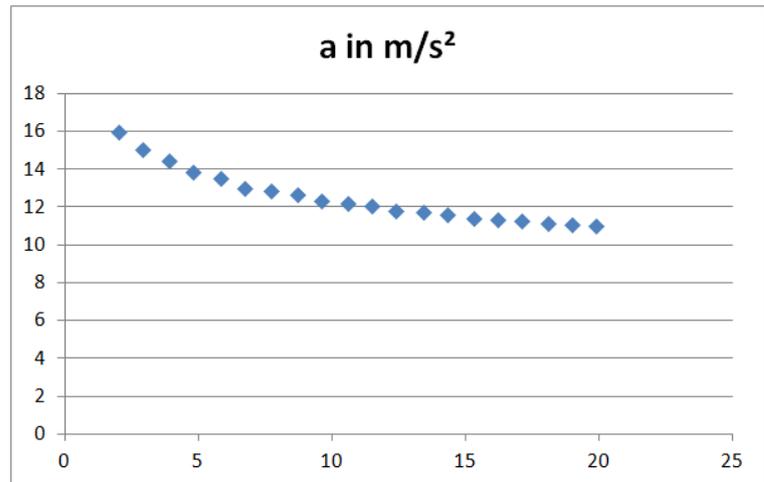
Bevor wir die Daten nach Spalte C sortieren, müssen dort die Formeln durch Werte ersetzt werden. Kopieren Sie die gesamte Spalte C und gehen Sie im Reiter „Start“ auf Einfügen → Werte einfügen.

Sortieren Sie dann die die Spalten A,B, und C nach dem Kriterium C. Die Zeilen mit einer 0 bei C können Sie löschen.

	A	B	C
1	<b>t in s</b>	<b>a in m/s<sup>2</sup></b>	
2	2	15,9668	1
3	2,1	12,0508	0
4	2,2	10,5566	0
5	2,3	8,45703	0
6	2,4	7,37305	0
7	2,5	8,20313	0
8	2,6	9,45313	0
9	2,7	12,1094	0
10	2,8	14,502	0
11	2,9	15,0195	1
12	3	14,2285	0

Es bleiben nur die Maxima übrig, die Sie nun in einem Punkteplot darstellen können.

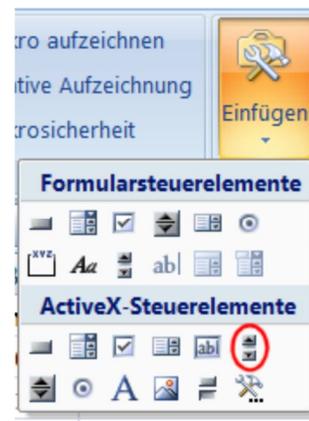
	A	B	C
1	t in s	a in m/s <sup>2</sup>	
2	2	15,9668	1
3	2,9	15,0195	1
4	3,9	14,4434	1
5	4,8	13,877	1
6	5,8	13,5156	1
7	6,7	13,0176	1
8	7,7	12,8516	1
9	8,7	12,6563	1
10	9,6	12,3145	1
11	10,6	12,222	1



Es soll nun untersucht werden, ob ein exponentielles Modell für die Dämpfung brauchbar ist. Eine mögliche Funktion hätte dann die Form  $f(x) = e^{-kx} + d$ . Das Problem ist, dass Excel nur eine Trendfunktion vom Typ  $f(x) = e^{-kx}$  zur Verfügung stellt. Das Problem lässt sich aber mit einem Trick ganz gut lösen.

Die Punkte müssten um den Wert  $d$  nach unten verschoben werden. Da dieser nicht bekannt ist, verwenden wir einen Schieberegler, der in Excel „Bildlaufleiste“ heißt.

Wählen Sie den Reiter „Entwicklertools“ und dort unter „Einfügen“ das ActiveX-Steuererelement Bildlaufleiste. Ziehen Sie die Bildlaufleiste mit gedrückter linker Maustaste auf. Klicken Sie in der Menüleiste auf „Eigenschaften“. Es wird ein Fenster geöffnet, in dem Sie die Eigenschaften der Bildlaufleiste einstellen können.



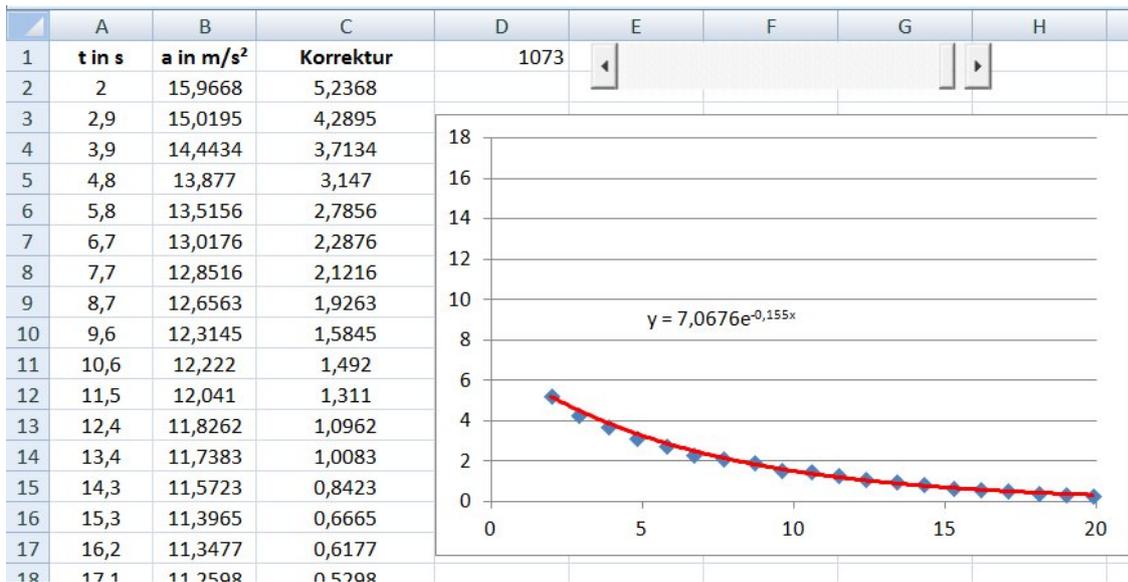
Der Wert des Schiebereglers wird in eine frei wählbare Zelle geschrieben (hier D1). Stellen Sie das Maximum auf 1000 ein und lassen Sie das Minimum bei 0. Wenn Sie jetzt den Entwurfmodus mit dem Button im Menü ausschalten, können Sie den Schieberegler bewegen und sehen den Wert in D1.

LinkedCell	D1
Locked	True
Max	1000
Min	0

Da der Wert sich mit der Schrittweite 1 verändert, wird nun von allen  $y$ -Werten  $D1/100$  subtrahiert. Tragen Sie dazu in C2 folgende Formel ein „=B2-\$D\$1/100“ und kopieren Sie diese bis zum letzten  $y$ -Wert nach unten.

Markieren Sie die erste und die dritte Spalte (Strg-Taste gedrückt halten) und erzeugen Sie einen neuen Punkteplot. Mit dem Schieberegler können Sie nun die Punkte nach oben und unten verschieben. Fixieren Sie noch die  $y$ -Achse (Diagramm markieren, Layout→Achsen→Vertikale Primärachse→weitere Optionen ...→

Minimum/Maximum auf „fest“). Erzeugen Sie jetzt eine exponentielle Trendlinie und schieben Sie die Punkte so, dass diese einigermaßen passt.



Die Funktion passt ganz gut und lautet für die nicht korrigierten Messwerte

$$f(x) = 7,07e^{-0,155x}$$

Mit dem Korrekturwert  $1073/100 = 10,73$  ergibt sich

$$f_k(x) = 7,07 \cdot e^{-0,155x} + 10,73$$

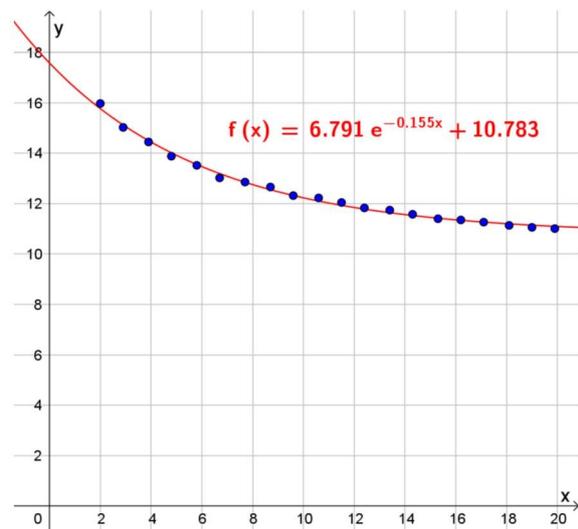
Der Korrekturwert beschreibt die Beschleunigung in der Ruhelage.

### Alternative mit GeoGebra

Einfacher geht es mit GeoGebra, da hier Trendfunktionen selbst definiert werden können. Übertragen Sie die Werte in die Tabelle von GeoGebra und erzeugen Sie eine Liste von Punkten (markieren→rechte Maustaste). Definieren Sie dann folgende Trendfunktion:

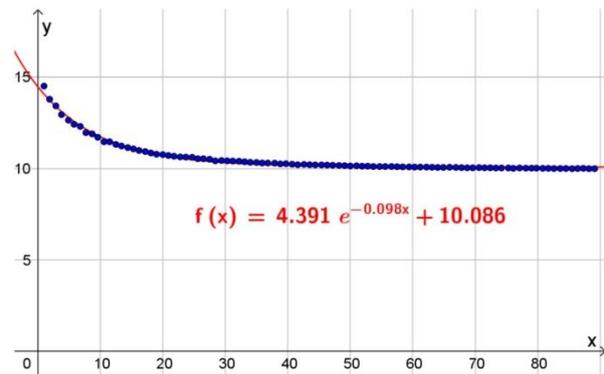
$$\text{Trend}(L\_1, a \cdot \exp(-b \cdot x) + c)$$

Sie erhalten etwa das gleiche Ergebnis, aber viel schneller.



## Interpretation

Der Graph der Exponentialfunktion passt recht gut zu den Punkten. Die additive Konstante von  $10,7 \text{ m/s}^2$  bzw.  $10,8 \text{ m/s}^2$  sollte die Gravitationsbeschleunigung in der Ruhelage wiedergeben, also einen Wert von etwa  $9,8 \text{ m/s}^2$  haben. Die Abweichung von ca. 10% könnte man auf einen Messfehler zurückführen. Die Messung über einen längeren Zeitraum (90s) zeigt aber eine bessere Anpassung.



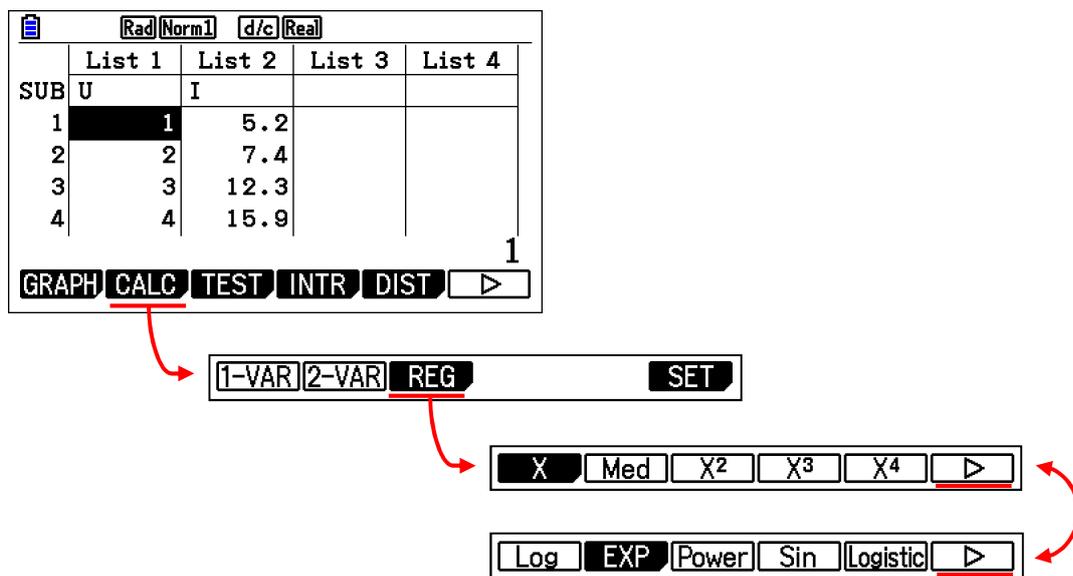
Die Dämpfungskonstante ist mit  $0,098$  kleiner als vorher. Man sieht auch, dass bei den ersten Punkten eine größere Dämpfung vorliegt, als die Kurve anzeigt. Das exponentielle Modell geht von einer Dämpfung aus, die proportional zur Geschwindigkeit ist (Stokes-Reibung). Dies ist aber nur bei geringen Geschwindigkeiten und laminarer Strömung der Fall. Offenbar ist die Dämpfung aber zu Beginn größer. Dies liegt vermutlich an der höheren Geschwindigkeit, bei der Turbulenzen entstehen, so dass die Dämpfung sich mehr in Richtung einer quadratischen Abhängigkeit von der Geschwindigkeit verschiebt (Newton-Reibung).

# Anhang

## A – Regression

Bei der Auswertung von Experimenten ist häufig eine Funktion gesucht, die „gut“ zu den Messwerten passt. Auf Grund der Abweichungen durch Messfehler ist eine Interpolation in der Regel nicht sinnvoll. Zur mathematischen Modellierung verwendet man besser eine Regression.

Der fx-CG50 besitzt ein Regressionsmodul mit verschiedenen Regressionsfunktionen. Dieses Werkzeug kann man z.B. im Listen-Menü verwenden (s. 2.7).



<b>X</b>	Lineare Regression	$y = a \cdot x + b$
<b>Med</b>	Lineare Median-Median-Regression	$y = a \cdot x + b$
<b>X<sup>2</sup></b>	Polynom-Regression Grad 2	$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
<b>X<sup>3</sup></b>	Polynom-Regression Grad 3	$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
<b>X<sup>4</sup></b>	Polynom-Regression Grad 4	$y = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
<b>Log</b>	Logarithmische Regression	$y = a \cdot b \cdot \ln(x)$
<b>EXP</b>	Exponentielle Regression	$y = a \cdot e^{b \cdot x}$
<b>Power</b>	Potenz-Regression	$y = a \cdot x^b$
<b>Sin</b>	Trigonometrische Regression	$y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$
<b>Logistic</b>	Logistische Regression	$y = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-b \cdot x}}$

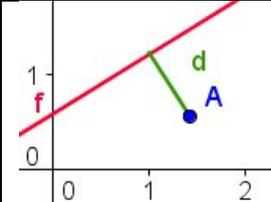
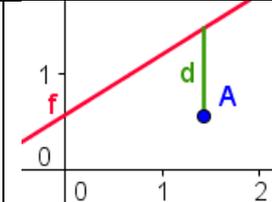
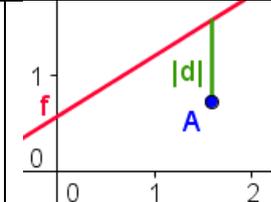
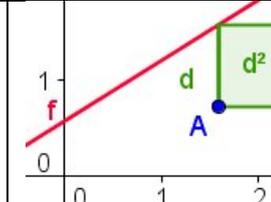
Regression ist ein mächtiges Werkzeug beim Modellieren, das im Unterricht normalerweise als Blackbox verwendet wird.

Um eine Vorstellung zu entwickeln, was bei einer Regression passiert, kann man eine lineare Regression exemplarisch als Optimierungsproblem im Zusammenhang mit Kurven- bzw. Funktionenscharen behandeln. Dabei ist der Einsatz eines CAS hilfreich.

Die Situation ist immer die gleiche:

- (1) Gegeben ist eine Liste von Messwertpaaren. Gesucht ist eine Funktion, die mit den Messwerten **möglichst gut** übereinstimmt.
- (2) Man macht eine Annahme über den Typ der Funktion (linear, quadratisch, exponentiell, ...).
- (3) Die Parameter in der Funktion werden so bestimmt, dass die **Abweichung** zwischen Funktion und Messwerten minimal wird.

Dazu muss der Begriff **Abweichung** präzisiert werden. Grundsätzlich gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, eine Abweichung zu messen:

			
<b>Geometrischer Abstand</b> Durch den Satz des Pythagoras kommen Wurzeln vor.	<b>Abweichung der Funktionswerte (y-Abweichung)</b> Positive und negative Abweichungen gleichen sich aus.	<b>Betrag der y-Abweichung</b> Das macht Fallunterscheidungen nötig.	<b>Quadrat der y-Abweichung</b> Kein Vorzeichenproblem, große Abweichungen werden stärker berücksichtigt.

Mit Ausnahme der Median-Median-Regression<sup>5</sup> verwenden alle Regressionen des fx-CG50 die Quadrate der y-Abweichungen<sup>6</sup>.

Zu den Messwerten des folgenden Experimentes soll nach dieser Methode eine Regressionsgerade berechnet werden.

### Messwerte

An einem Widerstand wird bei verschiedenen Spannungen U die Stromstärke I gemessen.

Es ergibt sich folgende Tabelle (x: U in V; y: I in mA):

x	1	2	3	4
y	5,2	7,4	12,3	15,9

<sup>5</sup> Bei dieser Methode werden große Abweichungen (Ausreißer) weniger stark berücksichtigt.

<sup>6</sup> Diese **Methode der kleinsten Quadrate** geht auf C.F. Gauß zurück.

Mit dem Ansatz  $y = a \cdot x + b$  ergibt sich für das Messwertpaar  $(x_k; y_k)$  die  $y$ -Abweichung

$$\Delta y = y - y_k = a \cdot x_k + b - y_k$$

Für die Summe der Abstandskquadrate gilt

$$\sum_{k=1}^4 (a \cdot x_k + b - y_k)^2$$

$$= (a \cdot 1 + b - 5,2)^2 + (a \cdot 2 + b - 7,4)^2 + (a \cdot 3 + b - 12,3)^2 + (a \cdot 4 + b - 15,9)^2$$

Dies ist eine Funktion in den Variablen  $a$  und  $b$ . Man kann sie aber auch als Funktionenschar  $f_a(b)$  interpretieren.

Mit Hilfe eines CAS (ClassPad) lässt sich das Problem schnell lösen:

- (1) Definition der Funktion  $f_a(b)$ .
- (2) Ausmultiplizieren. Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel.
- (3) Die  $x$ -Koordinate des Scheitelpunktes wird als Lösung der Gleichung  $f'_a(b) = 0$  in Abhängigkeit von  $a$  berechnet.
- (4) Die Funktion  $h(a)$  beschreibt die  $y$ -Koordinate des Scheitelpunktes der Parabel zu  $f_a(b)$  in Abhängigkeit von  $a$ .
- (5) Auch der Graph von  $h(a)$  ist eine nach oben geöffnete Parabel.
- (6) Das Minimum der Funktion  $h(a)$  wird berechnet.
- (7) Der zugehörige  $y$ -Wert wird berechnet.

```

Datei Edit Einf. Aktion
[Icons]
1 Define fa(b)=(a*1+b-5.2)^2+(a*2+b-7.4)^2+(a*3+b-12.3)^2+(a*4+b-15.9)^2 done
2 expand(fa(b))
3 solve(diff(fa(b),b)=0,b) 30*a^2+4*b^2+20*a*b-241*a-81.6*b+485.9 {b=-2.5*a+10.2}
4 Define h(a)=fa(-2.5a+10.2) done
5 expand(h(a))
6 solve(diff(h(a),a)=0,a) 5*a^2-37*a+69.74 {a=3.7}
7 -2.5*3.7+10.2 0.95
□
Alge Dezimal Real Bog

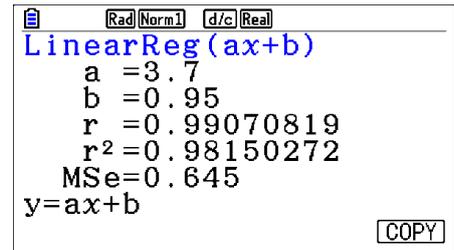
```

Damit liegt das absolute Minimum („tiefster Tiefpunkt“) der Funktionenschar  $f_a(b)$  bei  $a=3,7$  und  $b=0,95$ . Für diese Werte ist die Summe der Abstandskquadrate minimal.

Die gesuchte Regressionsfunktion lautet also

$$y = 3,7x + 0,95$$

Dies wird durch das Regressionsmodul bestätigt.



The screenshot shows a calculator interface with a menu bar containing 'Rad', 'Norm1', 'd/c', and 'Real'. The main display area shows the following text: 'LinearReg(ax+b)', 'a = 3.7', 'b = 0.95', 'r = 0.99070819', 'r^2 = 0.98150272', 'MSe = 0.645', and 'y=ax+b'. A 'COPY' button is visible in the bottom right corner of the display area.

An dieser Stelle können auch noch weitere Regressionsmodule verwendet werden (Excel, GeoGebra, ...), um zu zeigen, dass alle auf das gleiche Ergebnis kommen.

## B – Daten mit Excel austauschen

In manchen Fällen, insbesondere bei großen Datenmengen, kann es sinnvoll sein, die Daten mit einem Computerprogramm zu bearbeiten. Gelingt es, die Daten vom fx-CG50 in eine Excel-Datei zu übertragen, ist meist auch der Import in anderen Programmen (z.B. GeoGebra) möglich. Umgekehrt werden in den Naturwissenschaften Interfaces zur Messwerterfassung verwendet (z.B. CASSY, COBRA, ...), die ihre Daten an Excel exportieren können. Werden die Daten nun auf den fx-CG50 übertragen, können die Schüler Daten eines Demonstrationsexperiments individuell auswerten.

Da der fx-CG50 csv-Dateien lesen und schreiben kann, ist ein Austausch von Daten denkbar einfach.

Bei dem csv-Format (*comma separated values*) handelt es sich um eine Textdatei, die man mit jedem einfachen Texteditor öffnen und bearbeiten kann. Die Datensätze werden durch einen Zeilenumbruch getrennt und die Daten innerhalb eines Datensatzes durch ein spezielles Zeichen. In USA ist das standardmäßig ein Komma. Da in Deutschland aber das Komma zur Dezimaltrennung verwendet wird (in USA der Punkt), verwendet Windows ein Semikolon. Das könnte man in den Systemeinstellungen ändern (*Systemsteuerung* → *Zeit, Sprache und Region* → *Region und Sprache* → *Zahlenformat ändern* → *Weitere Einstellungen*), ist aber nicht nötig, da man beim fx-CG50 die entsprechenden Zeichen festlegen kann.

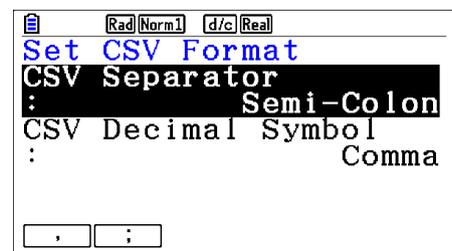
### Beispiel

Die Listen aus Anhang A sollen in nach Excel übertragen werden.

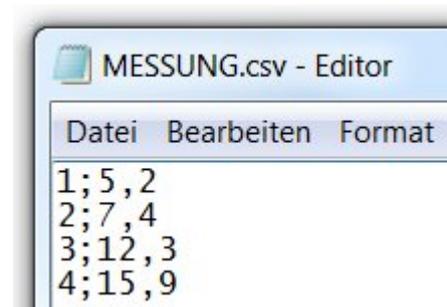
Drücken Sie zweimal [F6], dann [F1]{CSV} und [F3]{SET}.

Stellen Sie dort als Trennzeichen das Semikolon und als Dezimaltrennung das Komma ein. Mit [EXE] bestätigen und dann [F2]{SAVE-AS} wählen, den Speicherort (Verzeichnis) wählen, [F1]{SAVE-AS} drücken und einen Namen eingeben, dann noch [EXE] – fertig.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB U	I			
1	1	5.2		
2	2	7.4		
3	3	12.3		
4	4	15.9		



Schließen Sie nun den fx-CG50 mit dem USB-Kabel an Ihren Computer an und wählen Sie [F1]{USB-Massensp}. Der fx-CG50 wird nun wie eine externe Festplatte verwaltet. Suchen Sie dort die Datei „MESSUNG.csv“ und öffnen Sie diese zunächst in einem Texteditor. Sie sehen, dass die Daten wie oben beschrieben dargestellt wurden. Die Überschriften werden allerdings nicht mitgespeichert.



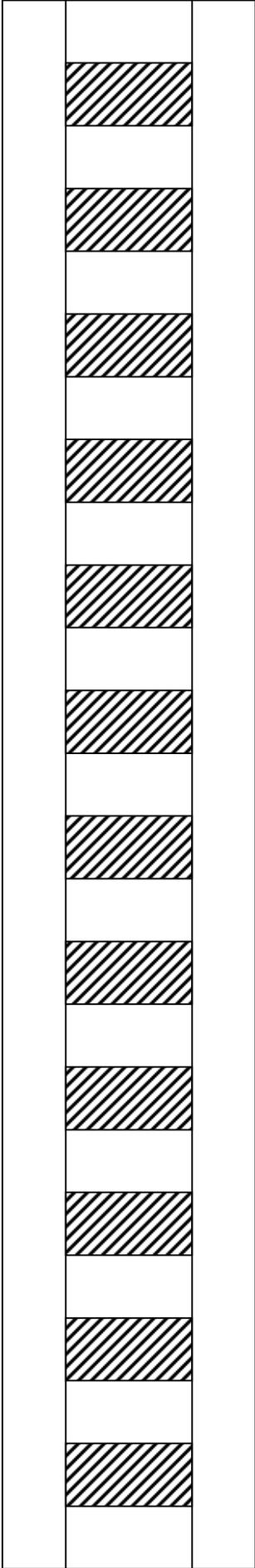
Mit einem Doppelklick wird die Datei in einer Tabellenkalkulation geöffnet.

Hier können Sie die Daten nun verarbeiten oder kopieren und in eine andere Anwendung (z.B. GeoGebra) einfügen.

	A	B
1	1	5,2
2	2	7,4
3	3	12,3
4	4	15,9

Um umgekehrt Daten von einer Tabellenkalkulation auf den fx-CG50 zu übertragen, speichert man diese als csv-Datei, kopiert sie auf den fx-CG50 und öffnet sie im Listeneditor mit [F1]{CSV} [F1]{LOAD} [F1]{LIST} oder ... [F2]{FILE}. Bei FILE ersetzt die Datei alle Listen, d.h. vor dem Laden werden alle Listen gelöscht. Bei LIST werden die Daten ab der Spalte eingefügt, in der der Cursor steht.

**C – Kopiervorlage Fall-Leiter**



# Stichwortverzeichnis

## A

Abkühlung von Wasser .....	27
Abstandsquadrate.....	56

## B

Basketball.....	17
-----------------	----

## C

Cola-Dose .....	36
-----------------	----

## D

Dämpfung.....	50
Daten grafisch darstellen .....	11
Datenübertragung zwischen zwei Rechnern.....	10
Differenzialgleichung	
Abkühlung .....	29
Federpendel .....	47
Flasche.....	34
Freier Fall.....	15
Kondensator .....	26
Dreipolkabel.....	5, 6, 14, 17, 23, 44

## E

E-CON4 .....	5
Entropie.....	27
Excel, Daten übertragen.....	58

## F

Fadenpendel, gedämpfte Schwingung.....	48
Fall-Leiter .....	13
Federpendel .....	44
Flasche mit Loch.....	30
Freier Fall .....	13, 21
Funktionenschar.....	56

## G

Gedämpfte Schwingung .....	48
Grapheneditor.....	11

## H

Hebelgesetze.....	36
Hydrostatischer Druck.....	30

## I

Interface.....	5
----------------	---

## K

Kondensator.....	23
Kugelvolumen .....	41

## L

Lichtschranke .....	13
Lichtsensoren .....	13
Luftballon.....	41

## M

Master-Eingang des C-LAB.....	6, 14, 17, 23, 44
Messfühler .....	5
Messwerte aufnehmen.....	6
Methode der kleinsten Quadrate .....	55
Mittelwert, gewichteter.....	39

## O

Ortsfaktor.....	16
-----------------	----

## R

Regression.....	12, 54
Regressionsgerade, Herleitung.....	55
Reibung, Newton- .....	53
Reibung, Stokes- .....	53

## S

Scatterplot .....	12
Schwerpunkt Cola-Dose.....	36
Sensor-Auswahl .....	6
Sensoren .....	5

## T

Tank mit Leck .....	35
Temperatursensor .....	6, 27
Trigger einstellen .....	8

## V

Vernier .....	5
---------------	---

## Z

Zoom.....	8
-----------	---